

Ю.С. Данилова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ





Частное образовательное учреждение высшего образования
«Тольяттинская академия управления»

Ю.С. Данилова

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ
НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ**

Учебно-методическое пособие

*Рекомендовано межпредметным методическим объединением
ЧОУ ВО «Тольяттинская академия управления»
в качестве учебно-методического пособия*

Тольятти
ТАУ
2025

УДК 51(075.8)

ББК 22.1я73

У 91

Данилова, Юлия Сергеевна.

У 91 Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных. Неопределенный интеграл: учебно-методическое пособие / Ю.С. Данилова. – Тольятти: ТАУ, 2025. – 89 с.

Представленный в пособии учебно-методический материал может служить руководством для решения задач на практических занятиях, при выполнении домашних и индивидуальных заданий.

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика», 38.03.01 «Экономика», 38.03.02 «Менеджмент», 42.03.01 «Реклама и связи с общественностью».

УДК 51(075.8)

ББК 22.1я73

© Данилова Ю.С., 2025

© ЧОУ ВО «Тольяттинская
академия управления», 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава 1. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	
§1. Функции двух переменных.....	5
§2. Дифференцирование функций двух переменных. Частные производные первого порядка.....	8
§3. Полный дифференциал функции двух переменных	16
§4. Частные производные второго порядка	19
§5. Производная по направлению. Градиент.....	22
§6. Экстремум функции двух переменных.....	26
§7. Метод наименьших квадратов.....	32
Глава 2. Неопределённый интеграл	
§1. Неопределённый интеграл. Основные понятия.....	42
§2. Непосредственное интегрирование.....	45
§3. Интегрирование подстановкой.....	49
§4. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трёхчлен в знаменателе.....	55
§5. Метод интегрирования по частям.....	59
§6. Интегрирование простейших рациональных дробей	63
§7. Метод неопределённых коэффициентов.....	67
§8. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.....	74
§9. Интегрирование тригонометрических функций (продолжение).....	79
§10. Закрепление темы «Неопределённый интеграл».....	84

Введение

Настоящее пособие предназначено для улучшения качества, закрепления и контроля умений и навыков в решении задач по темам «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных»; «Интегральное исчисление функции одной переменной».

Содержит краткие сведения из теории и большое количество задач с подробным решением.

Подбор задач и анализ некоторых их решений позволяет стимулировать самостоятельную деятельность студентов как на занятии в аудитории, так и при выполнении домашнего задания.

Пособие содержит следующие темы: «Функции двух переменных»; «Дифференцирование функций двух переменных. Частные производные первого и второго порядков»; «Полный дифференциал функции двух переменных», «Производная по направлению. Градиент», «Экстремум функции двух переменных»; «Метод наименьших квадратов»; «Неопределённый интеграл. Основные понятия»; «Непосредственное интегрирование»; «Интегрирование подстановкой»; «Интегрирование выражений, содержащих квадратный трёхчлен в знаменателе»; «Метод интегрирования по частям»; «Интегрирование простейших рациональных дробей»; «Метод неопределённых коэффициентов»; «Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции».

ГЛАВА 1. «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ»

§1. Функции двух переменных

Определение 1. Переменная величина z называется функцией двух независимых переменных величин x и y , если каждой паре допустимых значений x и y соответствует единственное значение z .

Обозначения функции двух переменных: $z = f(x; y); z = z(x; y); z = \varphi(x; y)$ и т.п.

Определение 2. Совокупность пар $(x; y)$ значений x и y , при которых функция z определена, называется областью определения этой функции.

Определение 3. Множество значений функции двух переменных – это все те значения, которые принимает функция z .

Определение 4. Линией уровня функции $z = f(x; y)$ называется геометрическое место точек плоскости XOY , в которых данная функция принимает одно и то же значение, т.е. $f(x; y) = C$

Задачи для практических занятий и самостоятельного решения

Задача 1. (разобрать решение самостоятельно)

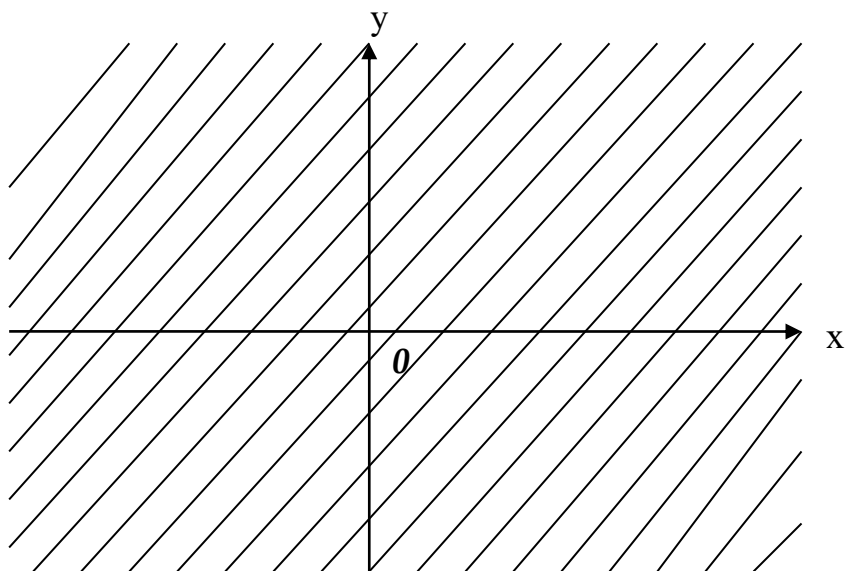
Найти область определения функций:

$$1) z = x + y; \quad 2) \frac{z}{c} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

Решение:

1) $z = x + y$

x и y – действительные числа, область определения вся плоскость XOY .

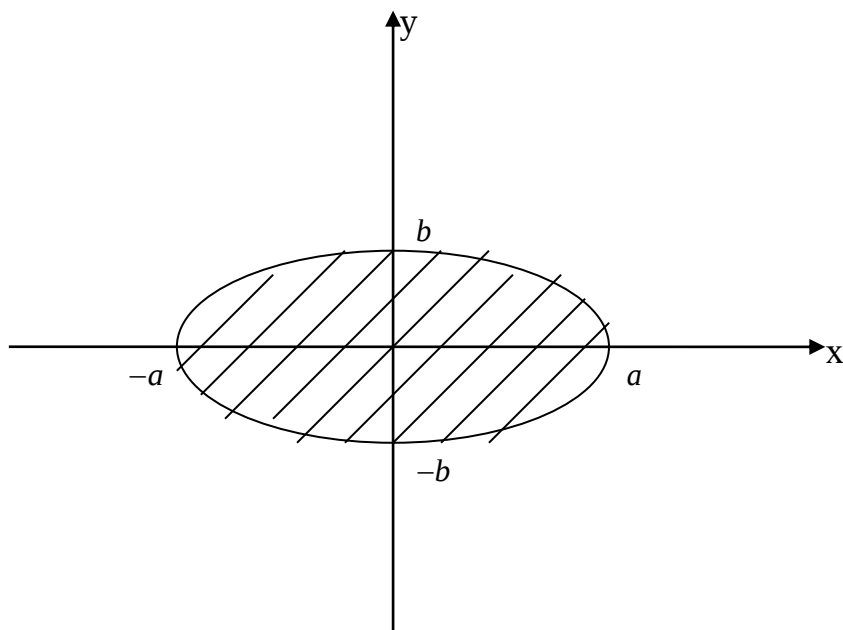


$$2) \frac{z}{c} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

Решение:

Функция z существует в том случае, если подкоренное выражение

неотрицательное, т.е. $1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$



Ответ: область определения функции является часть плоскости, ограниченная эллипсом. Граница области входит в область определения.

Задача 2. Найти область определения функции $z = \frac{4}{x^2 + y^2}$

Задача 3. Найти область определения функции $z = \sqrt{xy}$

Задача 4. Найти область определения функции $z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

Задача 5. Найти область определения функции $\sin z = x^2 + y^2$

Указание: Задачи № 2-5 решить самостоятельно.

Разобрать решение задачи:

Задача 6. Построить линии уровня функции: $z = x^2 - y$ при $z = 0; \pm 1; \pm 2$

Решение:

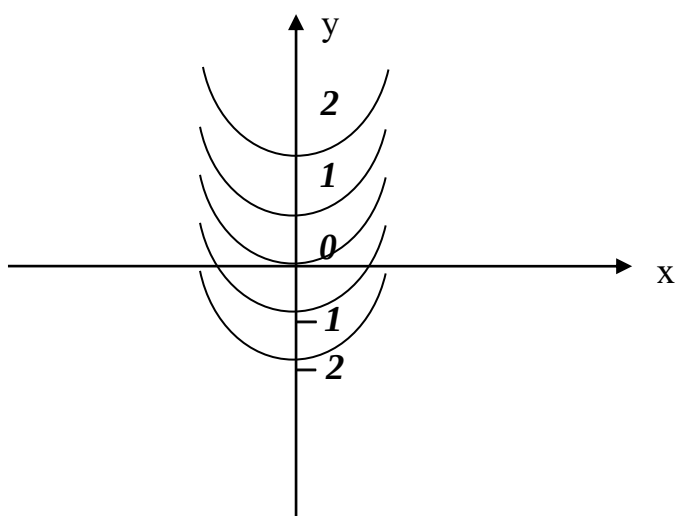
Уравнение линий уровня имеет вид $x^2 - y = c$ или $y = x^2 - c$

$c = 0; y = x^2$ – парабола

$c = +1; y = x^2 - 1; c = -1; y = x^2 + 1$ – парабола

$c = +2; y = x^2 - 2; c = -2; y = x^2 + 2$ – парабола

Изображаем линии уровня в плоскости **XOY**



Ответ: Семейство парабол $y = x^2 - C$

Задача 7. Построить линии уровня функции $z = x^2 - y^2$ при $z = 0; \pm 1; \pm 2$

Задача 8. Построить линии уровня функции $z = x \cdot y$ при $z = 0; \pm 1; \pm 2$

Указание: Задачи №7,8 решить самостоятельно

Задача 10. Указать области определения функций:

$$1) u = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}; \quad 2) z = \frac{4}{x + y}; \quad 3) u = y + \sqrt{x}$$

Задача 11. Построить линии уровня функций: (при $z = 0; \pm 1; \pm 2$)

$$1) z = \sqrt{xy}; \quad 2) z = \frac{y}{x^2}$$

Задача 12. Дана функция $\varphi(x; y) = \frac{2x - y}{x - 2y}$. Вычислить

$$\varphi(1; 2); \varphi(3; 1); \varphi(a; 2a).$$

Задача 13. Найти область определения функций:

$$1) z = 4 - x - 2y; \quad 2) q = \frac{1}{\sqrt{xy}}; \quad 3) V = \arccos(x^2 + y^2)$$

§2. Дифференцирование функций двух переменных.

Частные производные первого порядка.

Определение 1. Частное приращение функции по одному из аргументов есть разность между двумя ее значениями, когда приращение получает только данный аргумент; полное приращение функции – разность между двумя значениями, когда приращения получают все ее аргументы.

Полное приращение функции двух переменных $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ определяется формулой

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x; y)$$

а ее частные приращения (по x и y соответственно) в той же точке –

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x; y)$$

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x; y)$$

Определение 2. Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению данной переменной, когда последнее стремится к нулю.

Для функции двух переменных $z = f(x; y)$, по определению имеем:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x; y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (\text{частная производная по } x)$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x; y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (\text{частная производная по } y)$$

Заметим, что $\frac{\partial z}{\partial x}$ - единый символ для обозначения частной производной функции $f(x; y)$ по переменной x , ∂z и ∂x - самостоятельного смысла не имеют. Запись $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}$ означает, что частная производная вычислена в точке $M_0(x_0; y_0)$.

Геометрическая интерпретация частных производных

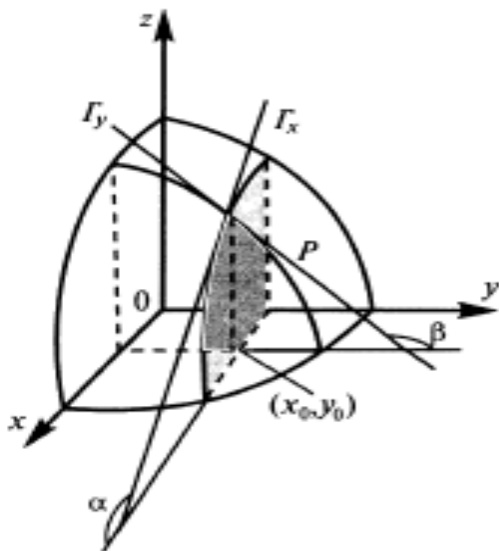


Рис.2

Геометрический смысл частных производных функции $z = f(x; y)$ в точке $(x_0; y_0)$ показан на рис.2.

Пусть график функции $z = f(x; y)$ представляет некоторую поверхность P . Тогда при $y = y_0$ мы получаем кривую Γ_x - сечение этой поверхности соответствующей плоскостью.

В этом случае производная $\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x$ выражает угловой коэффициент касательной к кривой Γ_x , в заданной точке $(x_0; y_0)$, т.е. $z'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha$, где α - угол наклона касательной к оси Ox . Аналогично $z'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \beta$.

Из определения частных производных следует, что для нахождения производной $z'_x(x, y)$ надо считать постоянной переменную y , а для нахождения $z'_y(x, y)$ - переменную x . При этом сохраняются известные формулы дифференцирования.

Задачи для практических занятий и самостоятельного решения.

Задача 1. (разобрать решение)

Найти частные производные функций: $z = x^3 + 3x^2y - y^3$

Решение:

Считая z функцией только одной переменной x или y по формулам дифференцирования функции одной переменной находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Полезно вспомнить, что в случае $C = \text{const} \rightarrow C' = 0$, $(c \cdot u)' = c \cdot u'$.

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{y=\text{const}} = (x^3 + 3x^2y - y^3)'_x = (x^3)'_x + (3x^2y)'_x - (y^3)'_x = (x^3)'_x + y \cdot (3x^2)'_x - 0 = 3x^2 + 6xy$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{x=\text{const}} = (x^3 + 3x^2y - y^3)'_y = (x^3)'_y + (3x^2y)'_y - (y^3)'_y = 0 + 3x^2 \cdot (y)'_y - (y^3)'_y = 3x^2 - 3y^2$$

Задача 2. (решить самостоятельно)

Найти частные производные функций: $z = 5x^3 + 4xy + 2y^5 + 2x^3y^5 - 3$

Задача 3. (разобрать решение)

Найти частные производные первого порядка для функции: $z = \sin x \cdot e^y$

Решение:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{y=\text{const}} = \left(\sin x \cdot e^y \right)'_x = e^y \cdot (\sin x)'_x = \left| (\sin x)' = \cos x \right| = e^y \cdot \cos x$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{x=\text{const}} = \left(\sin x \cdot e^y \right)'_y = \sin x \cdot (e^y)'_y = \left| (e^y)' = e^y \right| = \sin x \cdot e^y$$

Задача 4. (решить по образцу задачи №3)

Найти частные производные первого порядка для функции: $z = \cos 3x \cdot e^y$

Задача 5. (разобрать решение)

Найти частные производные первого порядка для функции:

$$z = \cos x \cdot \sin y$$

Решение:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{y=\text{const}} = \left(\cos x \cdot \sin y \right)'_x = \sin y \cdot (\cos x)'_x = \left| (\cos x)' = -\sin x \right| = -\sin y \cdot \sin x$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{x=\text{const}} = \left(\cos x \cdot \sin y \right)'_y = \cos x \cdot (\sin y)'_y = \left| (\sin y)' = \cos y \right| = \cos x \cdot \sin y$$

Задача 6. (решить по образцу задачи №5)

Найти частные производные первого порядка для функции:

$$z = \cos x \cdot \sin 2y$$

Задача 7. (разобрать решение)

Найти частные производные для функции: $z = \ln 2x \cdot \cos 3y$

Решение:

Находим

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{y=\text{const}} = \left(\ln 2x \cdot \cos 3y \right)'_x = \overbrace{\cos 3y}^{\text{const}} \cdot (\ln 2x)'_x = \left| \frac{(\ln U)'}{U} = \frac{U'}{U} \right|_{U=2x} = \cos 3y \cdot \frac{(2x)'}{2x} = \cos 3y \cdot \frac{2}{2x} = \cos 3y \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos 3y}{x}$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{x=\text{const}} = \left(\ln 2x \cdot \cos 3y \right)'_y = \ln 2x \cdot (\cos 3y)'_y = \left| \frac{(\cos U)'}{U} = -\sin U \cdot U' \right|_{U=3y} = \ln 2x \cdot (-\sin 3y) \cdot (3y)'_y = -3 \ln 2x \cdot \sin 3y$$

Задача 8. (решить по образцу задачи №7)

Найти частные производные первого порядка для функции:

$$z = \operatorname{tg} 2x \cdot \arcsin 3y$$

Задача 9. (разобрать решение)

Найти частные производные для функции: $z = (5x^3 y^2 + 1)^3$

Решение:

Находим

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{y=\text{const}} &= \left((5x^3 y^2 + 1)^3 \right)'_x = \left| \frac{(U^n)'}{U} = n \cdot U^{n-1} \cdot U' \right|_{U=5x^3 y^2 + 1; n=3} = 3 \cdot \overbrace{(5x^3 y^2 + 1)^2}^{U^{n-1}} \cdot \left(\overbrace{5x^3 y^2 + 1}^{U'} \right)'_x = \\ &= 3(5x^3 y^2 + 1)^2 \cdot \left(\overbrace{5y^2 \cdot (x^3)'_x + (1)'}^{\text{const}} \right) = 3(5x^3 y^2 + 1)^2 \cdot (5y^2 \cdot 3x^2) = 45y^2 x^2 \cdot (5x^3 y^2 + 1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{x=\text{const}} &= \left((5x^3 y^2 + 1)^3 \right)'_y = \left| \frac{(U^n)'}{U} = n \cdot U^{n-1} \cdot U' \right|_{U=5x^3 y^2 + 1; n=3} = 3 \cdot \overbrace{(5x^3 y^2 + 1)^2}^{U^{n-1}} \cdot \left(\overbrace{5x^3 y^2 + 1}^{U'} \right)'_y = \\ &= 3(5x^3 y^2 + 1)^2 \cdot \left(\overbrace{5x^3 \cdot (y^2)'_y + (1)'}^{\text{const}} \right) = 3(5x^3 y^2 + 1)^2 \cdot (5x^3 \cdot 2y) = 30x^3 y \cdot (5x^3 y^2 + 1)^2 \end{aligned}$$

Задача 10. (разобрать решение)

Найти частные производные первого порядка для функции:

$$z = \sin(x^2 y) + \ln(x - 2y^2)$$

Решение:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{y=\text{const}} &= \left(\sin(x^2 y) \right)'_x + \left(\ln(x - 2y^2) \right)'_x = \left| \begin{array}{l} (\sin U)' = \cos U \cdot U' \\ (\ln U)' = \frac{U'}{U} \end{array} \right| = \cos(x^2 y) \cdot \overbrace{(x^2 y)'_x}^{U'} + \frac{\overbrace{(x - 2y^2)'_x}^{U'}}{\underbrace{x - 2y^2}_U} = \\ &= \cos(x^2 y) \cdot y \cdot (x^2)'_x + \frac{(1 - 0)}{x - 2y^2} = 2xy \cdot \cos(x^2 y) + \frac{1}{x - 2y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{x=\text{const}} &= \left(\sin(x^2 y) \right)'_y + \left(\ln(x - 2y^2) \right)'_y = \left| \begin{array}{l} (\sin U)' = \cos U \cdot U' \\ (\ln U)' = \frac{U'}{U} \end{array} \right| = \cos(x^2 y) \cdot \overbrace{(x^2 y)'_y}^{U'} + \frac{\overbrace{(x - 2y^2)'_y}^{U'}}{\underbrace{x - 2y^2}_U} = \\ &= \cos(x^2 y) \cdot x^2 \cdot (y)'_y + \frac{(0 - (2y^2)'_y)}{x - 2y^2} = x^2 \cdot \cos(x^2 y) - \frac{4y}{x - 2y^2} \end{aligned}$$

Задача 11. (разобрать решение)

Показать, что функция $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ удовлетворяет уравнению

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$$

Решение:

Находим

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{y=\text{const}} &= \left(\ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \right)'_x = \left| \begin{array}{l} (\ln U)' = \frac{U'}{U} \\ (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \overbrace{(\sqrt{x} + \sqrt{y})'_x}^{U'} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \left((\sqrt{x})'_x + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{y=\text{const}} = \left(\ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \right)'_y = \left| \begin{array}{l} (\ln U)' = \frac{U'}{U} \\ (\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \overbrace{(\sqrt{x} + \sqrt{y})'}^{U'} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \left(0 + (\sqrt{y})'_y \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}$$

Подставим найденные выражения в левую часть уравнения:

$$x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} + y \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} + \frac{y}{\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} + \frac{y \cdot \sqrt{y}}{\sqrt{y} \cdot \sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x \cdot \sqrt{x}}{x \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})} + \frac{y \cdot \sqrt{y}}{y \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) = \frac{1}{2}$$

Получаем тождество, т.е. функция **z** удовлетворяет данному уравнению.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти частные производные для функций:

1) $z = 2\sqrt{x} + xy^3 + y^5 - 3$

5) $z = e^x - \frac{2}{3}y^3$

2) $z = 3xy + y^2 + \sqrt{xy}$

6) $z = (5x^3y^2 + 1)^3$

3) $z = 3xy + y^2 + \sqrt{xy}$

7) $S = \ln(e^\omega + \varphi)$

4) $V = \ln(S^2 + t)$

8) $z = \cos(ax - by)$

Задача 2. Найти частные производные для функций:

1) $z = e^x \cdot y$

4) $z = \cos x \cdot \sin y$

2) $z = \sin x \cdot e^y$

5) $z = \frac{y}{x}$

3) $V = S \cdot \cos t$

6) $z = \ln 2x \cdot \cos 3y$

Указание: При решении воспользоваться свойством $(c \cdot u)' = c \cdot u'$.

Задача 3. Найти частные производные первого порядка для функций:

1) $z = 8x^3y^5 - 4x^2y + 5x^4$

4) $z = 5^{x^2y} + xy^3 - 2x$

2) $z = \sin x + 3e^y + 2xy$

5) $z = 3\operatorname{tg}^3(3xy)$

Задача 4. Доказать, что функция $z = y^2 \cdot \sin(x^2 - y^2)$ удовлетворяет

$$\text{уравнению } y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + xy \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$$

Задача 5. Вычислить значения частных производных данных функций при указанных значениях аргументов:

1) $z = \frac{x+y}{x-y}$; $x = 2$; $y = 1$

2) $V = \sin(S \cdot t)$; $S = \frac{1}{2}$; $t = 2\pi$

3) $z = \sqrt{x^2 + 2y^2}$; $x = -1$; $y = 2$

Задача 6. Найти частные производные функций:

1) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

2) $z = 2y\sqrt{x} + 3y^2\sqrt[3]{x^2}$

3) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

4) $u = x \cdot \sin xy + y \cdot \cos xy$

5) $z = \sqrt{x} \cdot \sin \frac{y}{x}$

6) $u = \sin^2(x+y) - \sin^2 x - \sin^2 y$

Задача 7. Найти частные производные первого порядка для функций:

1) $z = 5x^3y^2 - 4xy + 2x + 3y - 1$

3) $z = \frac{5xy^3}{3 - x^2}$

2) $z = \ln(2x^3 + 2y)$

4) $z = \operatorname{arcctg} \sqrt{x^2 - y}$

Задача 8. Показать, что функция $z = \sqrt{x} \cdot \sin \frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению

$$2x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

§3. Полный дифференциал функции двух переменных.

Определение. Полным дифференциалом dz функции $z = f(x; y)$ называется главная часть полного приращения Δz линейная относительно приращений Δx и Δy , т.е. $dz \approx \Delta z$. Полный дифференциал функции

$$z = f(x; y) \text{ вычисляется по формуле: } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (1)$$

Замечание: В дальнейшем будем использовать следующие обозначения

$$\text{частных производных: } \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y$$

Тогда формулу (1) запишем в виде:

$$dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy \quad (2)$$

Задачи для практических занятий и самостоятельного решения

Задача 1. Найти полный дифференциал от функции: $z = x^2 y$

Решение:

Для нахождения полного дифференциала функции будем использовать формулу (2). Для этого найдём частные производные данной функции.

$$z'_x \Big|_{y=\text{const}} = (x^2 y)'_x = y \cdot (x^2)'_x = y \cdot 2x = 2xy$$

$$z'_y \Big|_{x=\text{const}} = (x^2 y)'_y = x^2 \cdot (y)'_y = x^2 \cdot 1 = x^2$$

Найденные частные производные подставляем в формулу (2).

Получаем полный дифференциал данной функции: $dz = 2xy \cdot dx + x^2 \cdot dy$

Ответ: $dz = 2xy \cdot dx + x^2 \cdot dy$

Задача 2. Найти полный дифференциал от функции: $z = \frac{xy}{x - y}$

Решение:

Для нахождения полного дифференциала функции будем использовать формулу (2). Для этого найдём частные производные данной функции.

$$\begin{aligned}
 z'_x|_{y=\text{const}} &= \left(\frac{\frac{u}{v}}{x-y} \right)'_x = \left| \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \right| = \frac{(xy)'_x \cdot (x-y) - xy \cdot (x-y)'_x}{(x-y)^2} = \frac{\overset{\text{const}}{y} \overset{=1}{(x)'_x} \cdot (x-y) - xy \left[\overset{=1}{(x)'_x} - 0 \right]}{(x-y)^2} = \\
 &= \frac{y(x-y) - xy}{(x-y)^2} = \frac{xy - y^2 - xy}{(x-y)^2} = \frac{-y^2}{(x-y)^2} \\
 z'_y|_{x=\text{const}} &= \left(\frac{\frac{u}{v}}{x-y} \right)'_y = \left| \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \right| = \frac{(xy)'_y \cdot (x-y) - xy \cdot (x-y)'_y}{(x-y)^2} = \frac{\overset{\text{const}}{x} \overset{=1}{(y)'_y} \cdot (x-y) - xy \left(0 - \overset{=1}{(y)'_y} \right)}{(x-y)^2} = \\
 &= \frac{x(x-y) - xy \cdot (-1)}{(x-y)^2} = \frac{x(x-y) + xy}{(x-y)^2} = \frac{x^2 - xy + xy}{(x-y)^2} = \frac{x^2}{(x-y)^2}
 \end{aligned}$$

Найденные частные производные подставляем в формулу (2).

Получаем полный дифференциал данной функции:

$$dz = \frac{-y^2}{(x-y)^2} dx + \frac{x^2}{(x-y)^2} dy$$

$$\text{Ответ: } dz = \frac{-y^2}{(x-y)^2} dx + \frac{x^2}{(x-y)^2} dy$$

Задача 3. Найти значение полного дифференциала функции

$$z = \text{arctg}(x-y) \text{ при } x=2; y=1; dx=0,1; dy=0,1$$

Решение:

Сначала найдём полный дифференциал функции. Для нахождения полного дифференциала функции будем использовать формулу (2). Для этого найдём частные производные данной функции.

$$z'_x|_{y=\text{const}} = \left(\text{arctg} \left(\frac{u}{x-y} \right) \right)'_x = \left| (\text{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2} \right| = \frac{(x-y)'_x}{1+(x-y)^2} = \frac{\overset{=1}{(x)'_x} - 0}{1+(x-y)^2} = \frac{1}{1+(x-y)^2}$$

$$z'_y|_{x=const} = \left(\arctg \overbrace{(x-y)}^u \right)'_y = \left((\arctgu)' \right) = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{(x-y)'_y}{1+(x-y)^2} = \frac{\overbrace{0-(y)'}^{=1}}{1+(x-y)^2} = \frac{-1}{1+(x-y)^2}$$

Найдём значения частных производных в заданной точке, при $x=2$ и $y=1$. Для этого подставим эти значения в найденные частные производные.

$$z'_x|_{\substack{x=2 \\ y=1}} = \frac{1}{1+(2-1)^2} = \frac{1}{2}; \quad z'_y|_{\substack{x=2 \\ y=1}} = \frac{-1}{1+(2-1)^2} = -\frac{1}{2}$$

Найденные значения частных производных в заданной точке, и заданные значения дифференциалов $dx=0,1$ и $dy=0,1$ подставляем в формулу (2) и получаем искомое значение полного дифференциала:

$$dz = \frac{1}{2} \cdot 0,1 - \frac{1}{2} \cdot 0,1 = 0$$

Ответ: $dz = 0$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4. Найти полные дифференциалы функций: 1) $z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$; 2)

$$z = y \cdot \ln 2x$$

Задача 5. Найти значение полного дифференциала функции $V = \sqrt{s^2 + t^2}$ при $s=3$; $t=4$; $ds=0,2$; $dt=-0,2$.

Задача 6. Найти полный дифференциал функций:

$$\text{а) } z = \cos(x + 2y^2)$$

$$\text{в) } z = x^2 \sin y + y \cos x^2$$

$$\text{б) } z = e^{-x}(1 + y^2)$$

$$\text{г) } u = \ln(e^y + e^x)$$

Задача 7. Вычислить значение полного дифференциала функции, если

$$z = \frac{x}{x-y} \text{ при } x=2, y=1, dx = -\frac{1}{3}, dy = \frac{1}{2}.$$

§4. Частные производные второго порядка.

Пусть имеем функцию 2-х переменных $z = f(x, y)$ и вычислены для данной функции частные производные: z'_x ; z'_y , то они вообще говоря, также являются функциями независимых переменных x и y . Поэтому от них можно снова находить производные как по x , так и по y . Следовательно, частных производных второго порядка от функции 2-х переменных четыре.

Вторые частные производные обозначаются так:

$(z'_x)'_x = z''_{xx}$ - здесь функция $z = f(x, y)$ дифференцирована последовательно два раза по x .

$(z'_x)'_y = z''_{xy}$ - функция $z = f(x, y)$ дифференцирована сначала по x , а потом результат дифференцируется по y .

$(z'_y)'_x = z''_{yx}$ - функция $z = f(x, y)$ дифференцируется сначала по y , а потом результат дифференцируется по x .

$(z'_y)'_y = z''_{yy}$ - здесь функция $z = f(x, y)$ - дифференцируется последовательно два раза по y .

Задача 1. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^3 - 2x^2y + 3y^2$

Решение:

$$z'_x|_{y=const} = \overset{=3x^2}{(x^3 - 2x^2y + 3y^2)'}_x = \overset{const}{(x^3)'}_x - \overset{=2x}{2y(x^2)'}_x + \overset{=0}{(3y^2)'}_x = 3x^2 - 4xy$$

$$z'_y|_{x=const} = \overset{=0}{(x^3 - 2x^2y + 3y^2)'}_y = \overset{const}{(x^3)'}_y - \overset{=1}{2x^2(y)'}_y + \overset{=6y}{(3y^2)'}_y = -2x^2 + 6y$$

$$z''_{xx}|_{y=const} = (3x^2 - 4xy)'_x = \overbrace{(3x^2)'_x}^{=6x} - \overbrace{4y(x)'_x}^{const=1} = 6x - 4y$$

$$z''_{xy}|_{x=const} = (3x^2 - 4xy)'_y = \overbrace{(3x^2)'_y}^{=0} - \overbrace{4x(y)'_x}^{const=1} = -4x$$

$$z''_{yx}|_{y=const} = (-2x^2 + 6y)'_x = \overbrace{(-2x^2)'_x}^{=-4x} + \overbrace{(6y)'_x}^{=0} = -4x$$

$$z''_{yy}|_{x=const} = (-2x^2 + 6y)'_y = \overbrace{(-2x^2)'_y}^{=0} + \overbrace{(6y)'_y}^{=6} = 6$$

$$z''_{xy} = z''_{yx}.$$

Задача 2. Найти частные производные второго порядка функции $z = \ln(x^2 + y^2)$

Решение:

$$z'_x|_{y=const} = \left(\ln(x^2 + y^2) \right)'_x = \left| \begin{array}{l} (lnu)' = \frac{u'}{u} \\ u = x^2 + y^2 \end{array} \right| = \frac{(x^2 + y^2)'_x}{x^2 + y^2} = \frac{(x^2)'_x + (y^2)'_x}{x^2 + y^2} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

$$z'_y|_{x=const} = \left(\ln(x^2 + y^2) \right)'_y = \left| \begin{array}{l} (lnu)' = \frac{u'}{u} \\ u = x^2 + y^2 \end{array} \right| = \frac{(x^2 + y^2)'_y}{x^2 + y^2} = \frac{(x^2)'_y + (y^2)'_y}{x^2 + y^2} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} z''_{xx}|_{y=const} &= \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right)'_x = \left| \begin{array}{l} \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ u = 2x \\ v = x^2 + y^2 \end{array} \right| = \frac{(2x)'_x \cdot (x^2 + y^2) - 2x \cdot (x^2 + y^2)'_x}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{2 \cdot (x^2 + y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 4x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

$$z''_{xy}|_{x=const} = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right)'_y = \left| \begin{array}{l} \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ u = 2x \\ v = x^2 + y^2 \end{array} \right| = \frac{(2x)'_y \cdot (x^2 + y^2) - 2x \cdot (x^2 + y^2)'_y}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{0 \cdot (x^2 + y^2) - 2x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{0 - 4xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$z''_{yx}|_{y=const} = \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} \right)'_x = \left| \begin{array}{l} \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ u = 2y \\ v = x^2 + y^2 \end{array} \right| = \frac{(2y)'_x \cdot (x^2 + y^2) - 2y \cdot (x^2 + y^2)'_x}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{0 \cdot (x^2 + y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{0 - 4xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$z''_{yy}|_{x=const} = \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} \right)'_y = \left| \begin{array}{l} \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ u = 2y \\ v = x^2 + y^2 \end{array} \right| = \frac{(2y)'_y \cdot (x^2 + y^2) - 2y \cdot (x^2 + y^2)'_y}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot (x^2 + y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 4y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4. Найти частные производные второго порядка для функций:

1) $z = x^3 - 3xy^2 + 2y^2$

3) $z = e^x \cdot \ln y$

2) $z = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$

4) $z = \sin x \cdot \ln y$

Задача 5. Найти частные производные второго порядка для функций:

1) $v = 2s^2t - 3t^3s;$

3) $z = 4\sqrt{2x} + y^2x + y^3 + 4;$

2) $v = \ln(x^2 - y^2);$

4) $u = x \cos y;$

Задача 6. Показать, что данные функции удовлетворяют приведённым уравнениям:

1) $z = \sqrt{x} \cos \frac{x}{y}$

$$x \cdot z'_x + y \cdot z'_y = \frac{z}{2}$$

2) $z = \frac{x^2}{2y} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$

$$x^2 \cdot z'_x + y^2 \cdot z'_y = \frac{x^3}{y}$$

3) $z = y \ln(x^2 - y^2)$

$$\frac{1}{x} \cdot z'_x + \frac{1}{y} \cdot z'_y = \frac{z}{y^2}$$

§5. Производная по направлению. Градиент.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x, y)$, пусть $l^0 = \{\cos \alpha, \cos \beta\}$ – единичный вектор, задающий направление прямой L , проходящей через точку $M(x, y)$. Выберем на прямой точку $M_1(x_1, y_1) = M(x, y) + \tau \cdot l^0$ (рис.1). Рассмотрим приращение функции $\Delta z = z(M_1) - z(M) = f(x + \tau \cos \alpha, y + \tau \cos \beta) - f(x, y)$ в точке $M(x, y)$.

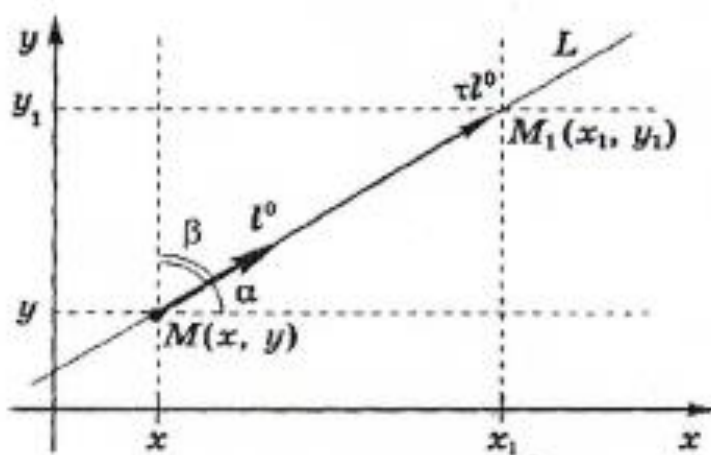


Рис.1

Предел отношения $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(x + \tau \cos \alpha, y + \tau \cos \beta) - f(x, y)}{\tau}$, если он существует, называется производной функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ по направлению $l^0 = \{\cos \alpha, \cos \beta\}$ и обозначается $\frac{\partial z}{\partial l}$.

Если функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M(x, y)$ непрерывные частные производные, то в этой точке существует и производная по любому направлению, исходящему из точки $M(x, y)$; вычисляется эта производная по формуле $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta$, где $\cos \alpha$ и $\cos \beta$ – направляющие косинусы вектора l^0 .

Задача 1. Вычислить производную функции $z = x^2 + xy + y^2 + 2x + 2y$ в точке $M(1, 1)$, по направлению вектора $\bar{l} = \{3, 4\}$.

Решение:

Находим направляющие косинусы вектора $\bar{l} = \{3, 4\}$ по формулам:

$$\bar{l}_x = \frac{l_x}{|\bar{l}|} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}; \quad \bar{l}_y = \frac{l_y}{|\bar{l}|} = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5} \quad \text{т.е.}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}; \quad \cos \beta = \frac{4}{5}.$$

Находим частные производные и значения частных производных в точке $M(1, 1)$.

$$z'_x|_{y=\text{const}} = (x^2 + xy + y^2 + 2x + 2y)'_x = 2x + y + 2$$

$$(z'_x)|_{M(1,1)} = 2 \cdot 1 + 1 + 2 = 5$$

$$z'_y|_{x=\text{const}} = (x^2 + xy + y^2 + 2x + 2y)'_y = x + 2y + 2$$

$$(z'_y)|_{M(1,1)} = 1 + 2 \cdot 1 + 2 = 5$$

Тогда производная по направлению: $\frac{\partial z}{\partial l} = 5 \cdot \frac{3}{5} + 5 \cdot \frac{4}{5} = 7$

Градиент

Градиентом функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ называется вектор с началом в точке M_0 , координаты которого равны соответствующим частным производным $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, вычисленным в точке $M(x, y)$. Градиент обозначается:

$$\overline{grad\ z} = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y} \right\}$$

Модуль градиента находится по формуле: $|\overline{grad\ z}| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$

Аналогично определяется производная по направлению и градиент для функции трёх переменных $u = f(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

$$\overline{grad\ u} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – направляющие косинусы вектора l^0 .

Градиент есть вектор, указывающий направление наибольшего возрастания функции $u = f(M)$.

Задача 2. Найти градиент функции $z = x^2 + 3xy^2 - z^3y$ в точке $M(-2, 3, -1)$.

Решение:

Находим частные производные данной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x \bigg|_{\substack{y=\text{const} \\ z=\text{const}}} = 2x + 3y^2; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u'_y \bigg|_{\substack{x=\text{const} \\ z=\text{const}}} = 6xy - z^3; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = u'_z \bigg|_{\substack{x=\text{const} \\ y=\text{const}}} = -3z^2y$$

Вычисляем значение этих производных в точке $M(-2, 3, -1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_x(-2; 3; -1) = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3^2 = 23$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'_y(-2; 3; -1) = 6 \cdot (-2) \cdot 3 - (-1)^3 = -35$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = f'_z(-2; 3; -1) = -3 \cdot (-1)^2 \cdot 3 = -9$$

Окончательно получаем: $\overline{\text{grad } u} = \{23; -35; -9\}$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3. Найти производные приведённых функций по направлению вектора $\bar{l}$ в заданной точке:

1) $z = x^3y - 5xy^2 + 8$ $\bar{l} = \{3; 4\}$ в точке $M_0(1, 1)$

2) $z = \ln\left(\frac{x^2 + y^2}{xy}\right)$ $\bar{l} = \{6; 8\}$ в точке $M_0(1, 2)$

Задача 4. Найти градиент и его модуль для функции $z = 3x^2y - 3xy - y^2$ в точке $M(1; 2)$.

Ответ: $\{6; 4\}$, $2\sqrt{13}$.

Задача 5. Найти производную функции $z = \text{arctg} \frac{y}{x}$ по направлению вектора $\bar{l} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ в точке $(1; 3)$.

Задача 6. Найти производную функции $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M(3; 4)$ в направлении градиента функции z .

Задача 7. Найти производную функции $u = \arcsin \frac{1}{x^2 + y^2}$ в точке $M(1; 1)$ в направлении вектора $\overline{MN}$, где $N(3; 2)$.

Задача 8. Найти величину и направление градиента функции $z = \frac{x^2}{2y - 3}$ в точке $A(-2; 1)$.

§6. Экстремум функции двух переменных

Многие задачи – как из области математики, так и других областей науки и техники – приводят к вопросу о нахождении максимального или минимального, наибольшего или наименьшего, значений некоторых функций, зависящих от одного или более переменных. Примерами служат задачи вида: значения:

- При переносе труб по двум коридорам, пересекающимся под прямым углом, найти наибольший размер трубы, которую можно пронести по коридорам. Ширина обоих труб известна.
- Определить размеры прямоугольного бассейна данного объёма V так, чтобы на облицовку его поверхности потребовалось наименьшее количество материала.
- Производственная функция (в денежном выражении) имеет вид $K(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$, где x, y - количество единиц соответственно первого и второго ресурса. Известна стоимость единицы первого и второго ресурсов. Найти максимальную прибыль при использовании этих ресурсов.

Во многих задачах требуется исследовать функцию на экстремум в случае, когда переменные функции не являются независимыми, а связаны друг с другом некоторыми добавочными условиями, которые служат ограничениями на их использование. В этом случае возникает специфическая задача для функций нескольких переменных на условный экстремум. Например:

- Из данного куска железа заданной площади надо сделать гараж в форме параллелепипеда, имеющего наибольшую вместимость.
- Производственная функция $N(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$, стоимость единицы первого ресурса равна 5, второго 10 ден.ед. В силу бюджетных ограничений на ресурсы может быть потрачено не более 600 ден.ед.

В силу этих условий найти оптимальное для производителя значение (x, y) количества используемых ресурсов.

Необходимость решения подобного рода задач требует введения понятий локальных экстремумов, условных экстремумов, глобальных экстремумов и методов их нахождения. Рассмотрим некоторые из них.

Локальные экстремумы функции двух переменных.

Определение 1. Точка $M(x_0, y_0)$ называется точкой максимума функции $z = f(x, y)$, если существует окрестность точки M такая, что для всех точек (x, y) из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$.

Определение 2. Точка $M(x_0, y_0)$ называется точкой минимума функции $z = f(x, y)$, если существует окрестность точки M такая, что для всех точек (x, y) из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$.

Максимумы и минимумы функции называются *локальными экстремумами*, а $M(x_0, y_0)$ – *точкой локального экстремума*.

Замечание 1. В силу определения, точка экстремума функции лежит внутри области определения функции; максимум и минимум имеют *локальный* (местный) характер: значение функции в точке (x_0, y_0) сравнивается с её значением в точках, достаточно близких к (x_0, y_0) . В области определения функция может иметь несколько экстремумов или не иметь ни одного.

Необходимое условие существования экстремума функции $z = f(x, y)$

Пусть дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум в точке $M(x_0, y_0)$ экстремум. Тогда частные производные первого порядка z'_x и z'_y в этой точке равны нулю.

Точки, в которых выполнены необходимые условия экстремума функции, $z = f(x, y)$ т.е. частные производные первого порядка обращаются в нуль (или не существуют), называются **критическими** или **стационарными**. Еще их называют точками «подозрительными на экстремум».

Замечание 2. Равенство нулю частных производных выражает необходимое, но недостаточное условие существования экстремума функции нескольких переменных. Поэтому требуются ещё достаточные условия существования экстремума.

Достаточные условия существования экстремума функции $z = f(x, y)$

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ - критическая точка функции $z = f(x, y)$. Обозначим:

$$A = (z''_{xx})\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} ; \quad B = (z''_{xy})\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} ; \quad C = (z''_{yy})\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

и составим $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Тогда

- 1) если $\Delta > 0$, то функция $z = f(x, y)$ имеет в точке M_0 экстремум,
а именно: при $A < 0$ (или $C < 0$) - максимум
при $A > 0$ (или $C > 0$) - минимум;
- 2) если $\Delta < 0$, то в точке M_0 (экстремума нет)
- 3) если $\Delta = 0$, то экстремум может быть и может не быть (сомнительный случай)

Алгоритм исследования функции двух переменных на экстремум

1. Определить критические точки, в которых функция может достигать экстремума, для чего нужно решить систему уравнений:
$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$$
2. Найти частные производные второго порядка z''_{xx} ; z''_{xy} ; z''_{yy} , и вычислить их значения в каждой из критических точек.
3. Вычислить для каждой из критических точек значение критерия наличия в ней экстремума по формуле:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

4. Определить точки минимума и максимума, используя достаточные условия существования экстремума.
5. Вычислить экстремум: $z_{\max} = f(x_{\text{кр}}; y_{\text{кр}})$ или $z_{\min} = f(x_{\text{кр}}; y_{\text{кр}})$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. (разобрать решение)

Исследовать на экстремум функцию: $z = -x^2 + xy - y^2 + 4x - 2y + 1$

Решение:

1. Найдем частные производные первого порядка

$$z'_x \Big|_{y=\text{const}} = (-x^2 + xy - y^2 + 4x - 2y + 1)'_x = (-x^2)'_x + y(x)'_x - 0 + 4(x)'_x - 0 + 0 = -2x + y + 4$$

$$z'_y \Big|_{x=\text{const}} = (-x^2 + xy - y^2 + 4x - 2y + 1)'_y = 0 + x(y)'_y - (y^2)'_y + 0 - 2(y)'_y - 0 + 0 = x - 2y - 2$$

2. Найдем критические точки, для чего составим систему уравнений:

$$\begin{cases} -2x + y + 4 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -2x + y = -4 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

Решаем систему линейных уравнений и находим критическую точку $M(2; 0)$.

Находим частные производные второго порядка и их значения в критических точке.

$$z''_{xx}|_{y=const} = (-2x + y + 4)'_x = (-2x)'_x + 0 + 0 = -2 \quad A = (z''_{xx})|_{\substack{x=2 \\ y=0}} = -2$$

$$z''_{xy}|_{x=const} = (-2x + y + 4)'_x = 0 + (y)'_y + 0 = 1 \quad B = (z''_{xy})|_{\substack{x=2 \\ y=0}} = 1$$

$$z''_{yy}|_{x=const} = (x - 2y - 2)'_x = 0 - 2(y)'_y - 0 = -2 \quad C = (z''_{yy})|_{\substack{x=2 \\ y=0}} = -2$$

3. Вычисляем значение критерия наличия экстремума по формуле

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2; \quad \Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0, \text{ следовательно в точке}$$

$M(2;0)$ экстремум существует, а именно максимум, так как $A = -2 < 0$.

$$4. \text{ Находим } z_{\max}(2;0) = -(2)^2 + 2 \cdot 0 - 0^2 + 4 \cdot 2 - 2 \cdot 0 + 1 = -4 + 8 + 1 = 5$$

$$\text{Ответ: } z_{\max}(2;0) = 5$$

Задача 2. (разобрать решение)

Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение:

1. Найдем частные производные первого порядка

$$z'_x|_{y=const} = (x^3 + y^3 - 3xy)'_x = (x^3)'_x + 0 - 3y(x)'_x = 3x^2 - 3y$$

$$z'_y|_{x=const} = (x^3 + y^3 - 3xy)'_y = 0 + (y^3)'_y - 3x(y)'_y = 3y^2 - 3x$$

2. Найдем критические точки, для чего составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$$

Решаем систему линейных уравнений (методом подстановки) и получаем критические точки $M_1(0;0)$ и $M_2(1;1)$

3. Находим частные производные второго порядка и их значения в критических точках:

$$z''_{xx}|_{y=const} = (3x^2 - 3y)'_x = (3x^2)'_x - 0 = 6x$$

$$A_1 = (z''_{xx})|_{x=0, y=0} = 6 \cdot 0 = 0 \quad A_2 = (z''_{xx})|_{x=1, y=0} = 6 \cdot 1 = 6$$

$$z''_{xy}|_{x=const} = (3x^2 - 3y)'_y = 0 - (3y)'_y = -3$$

$$B_1 = (z''_{xy})|_{x=0, y=0} = -3 \quad B_2 = (z''_{xy})|_{x=1, y=0} = -3$$

$$z''_{yy}|_{x=const} = (3y^2 - 3x)'_y = (3y^2)'_y - 0 = 6y$$

$$C_1 = (z''_{yy})|_{x=0, y=0} = 6 \cdot 0 = 0 \quad C_2 = (z''_{yy})|_{x=1, y=1} = 6 \cdot 1 = 6$$

4. Для каждой из критических точек вычислим значение критерия наличия в ней экстремума и определяем вид экстремума.

$$(\cdot)M_1(0;0): \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0 \Rightarrow \text{в } (\cdot)M_1(0;0) \text{ экстремума}$$

нет.

$$(\cdot)M_2(1;1): \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0 \Rightarrow \text{в } (\cdot)M_2(1;1) \text{ экстремум}$$

есть. Так как $A_2 = 6 > 0$, то экстремум $z_{\min}$.

5. Находим $z_{\min} = z(1;1) = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -1$.

Задача 3. (решить самостоятельно)

Исследовать на экстремум функцию: $z = x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y$

Ответ: $z_{\min} = z(0;3) = -9$

Задача 4. (решить самостоятельно)

Исследовать на экстремум функцию: $z = x^2 + y^2 + 2x + 4y - 3$

Ответ: $z_{\min} = z(-1;-2) = -8$

Задача 5. (решить самостоятельно)

Исследовать на экстремум функцию: $z = -x^2 + xy - y^2 + 4x - 2y + 1$

Ответ: $z_{\max} = z(2;0) = 5$

Задача 6. (решить самостоятельно)

Исследовать на экстремум функцию: $z = x^2 + y^2 + 2x + 4y - 3$

Ответ: $z_{\min} = z(-1;-2) = -8$

Задача 7. (решить самостоятельно)

Исследовать на экстремум функцию: $z = x^3 + y^3 - 9xy - 3$

Ответ: $M_1(0;0)$ - экстремума нет; $z_{\min} = z(3;3) = -30$

Задача 8. (решить самостоятельно)

Исследовать на экстремум функцию: $z = (x - 2)^2 + 2y^2 + 1$

Ответ: $z_{\min} = z(2;0) = 1.$

Задача 9. Найти экстремум функции:

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$$

Ответ: $z_{\min}\left(1; \frac{1}{2}\right) = 4$

Задача 10. Найти экстремум функции:

$$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$$

Ответ: $z_{\min}(1;4) = -21$

§7. Метод наименьших квадратов

Так называется очень распространённый метод обработки наблюдения, экспериментальных и анкетных данных, в основе которого лежит теория экстремумов функций нескольких переменных.

Суть метода заключается в следующем: по данным статистических наблюдений найти функциональную зависимость $y = f(x)$, т.е. по возможности точнее и в аналитической форме отразить общую тенденцию зависимости y от x , исключив при этом случайные отклонения, связанные с неизбежными погрешностями измерений или статистических наблюдений.

Найденная зависимость позволит находить значения для промежуточных значений и, в том числе, делать прогнозы на будущее, отталкиваясь от данных статистических наблюдений.

Так, в экономической практике, возникает ряд задач следующего типа:

- пусть в ходе исследования покупательского спроса получена зависимость количества реализуемого товара от цены товара, представленного в виде таблицы. Требуется по этим табличным данным определить кривую спроса, т.е. получить функциональную зависимость.
- Пусть прибыль предприятия за определённый период деятельности прослежена по годам и представлена в виде табличных данных. Требуется: 1) составить квадратичную зависимость деятельности по годам, как наиболее точную; 2) определить ожидаемую прибыль через 5 лет.
- В результате неоднократных исследований зависимости между сроком эксплуатации автомобиля и расходами на его ремонт получены определённые данные. Найти: 1) линейную зависимость стоимости ремонта автомобиля от срока эксплуатации; 2) предполагаемую величину затрат на ремонт за 7-й год эксплуатации.

Формулы, служащие для аналитического представления опытных данных, получили название *эмпирических формул*.

Задача нахождения эмпирических формул разбивается на два этапа. На первом этапе нужно установить *вид зависимости* $y = f(x)$, т.е. решить, является ли она линейной, квадратичной, логарифмической или какой-либо другой.

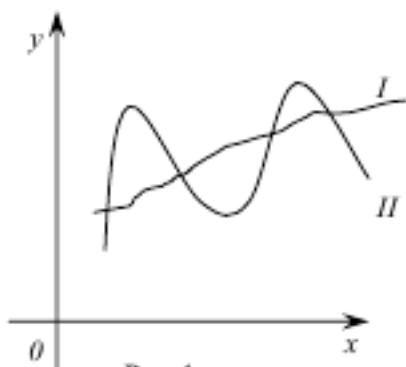


Рис.1

Предположим, например, что результаты экспериментальных исследований нанесены на плоскость (паре чисел (x_i, y_i) соответствует точка с такими же координатами). Разумеется, существует множество кривых, проходящих через эти точки (см. рис. 1).

Обычно предполагают, что кривая истинной зависимости – это наиболее «гладкая» кривая, согласованная с эмпирическими данными. Так, в случае, представленном на рис.1, исследователь, несомненно, предпочтёт кривую I кривой II.

Для проверки правильности вывода проводятся дополнительные исследования, т.е. проводится ещё ряд одновременных измерений величин x и y . Дополнительные точки наносят на плоскость. Если они оказываются достаточно близкими к выбранной кривой, то можно считать, что вид кривой установлен. В противном случае кривую надо скорректировать и вновь провести дополнительные измерения.

Кроме того, для вывода функции $y = f(x)$ руководствуются другими соображениями, как правило, не математического характера (теоретическими предпосылками, опытом предшествующих исследований и т.д.).

Предположим, что первый этап завершен, т.е. вид функции $y = f(x)$ установлен. Тогда переходят ко второму этапу – **определению неизвестных параметров этой функции.**

Согласно наиболее распространённому и теоретически обоснованному методу наименьших квадратов в качестве неизвестных параметров функции $f(x)$ выбирают такие значения, чтобы сумма квадратов *невязок* δ_i или отклонений «теоретических» значений $f(x_i)$, найденных по

эмпирической формуле $y = f(x)$, от соответствующих *опытных значений*

y_i , была минимальной (рис.2), т.е. $S = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2$ (1)

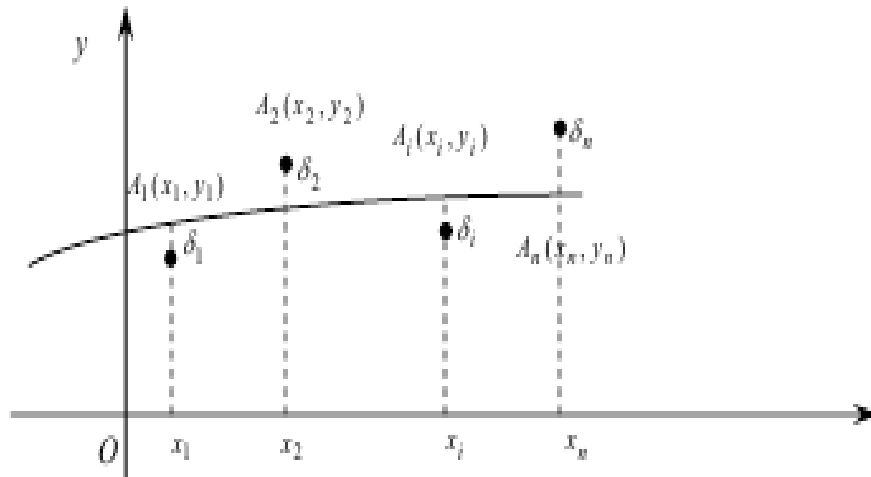


Рис.2

1. Линейная аппроксимация

Пусть в качестве функции $y = f(x)$ взята *линейная функция* $y = ax + b$ и задача сводится к отысканию таких значений параметров a и b , при которых функция (1) : $S = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$ принимает наименьшее значение. Заметим, что функция $S = S(a, b)$ есть функция двух *переменных* a и b до тех пор, пока не найдены, а затем не зафиксированы их «наилучшие» (в смысле метода наименьших квадратов) значения, а x_i, y_i - *постоянные* числа, полученные экспериментально.

Исследуем функцию $S = S(a, b)$ на экстремум. Из необходимых условий экстремума получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i)x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases}$$

После алгебраических преобразований эта система принимает следующий вид:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b n = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad (2)$$

Система (2) называется системой нормальных уравнений. Она имеет единственное решение, так как её определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{vmatrix} = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \neq 0$$

Убедимся, что полученные из системы (2) значения дают минимум функции $S = S(a, b)$. Найдём частные производные

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = A; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 2 \sum_{i=1}^n x_i = B; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n = C$$

Выражение $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = 4 \left(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) > 0$ в силу

изложенного выше и $A = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$, следовательно, согласно достаточному условию, функция имеет единственную точку минимума, определяемую из системы нормальных уравнений (2). Заметим, что в этой точке функция $S = S(a, b)$ имеет не просто локальный минимум, а наименьшее значение (глобальный минимум).

2. Квадратичная аппроксимация

Если в качестве функции $f(x)$ при минимизации функции (1) выбрана **квадратичная функция** $y = ax^2 + bx + c$, то её параметры находятся аналогично, исследуя на экстремум функцию

$$S(a,b,c) = \sum_{i=1}^n \left[(ax_i^2 + bx_i + c) - y_i \right]^2$$

Найдём частные производные:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)x_i^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^n 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)x_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial c} = \sum_{i=1}^n 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)$$

Из необходимых условий экстремума функции $S(a,b,c)$ получаем систему нормальных уравнений, для определения коэффициентов *квадратичной* зависимости:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + cn = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

Рассмотрим типичные примеры, для решения которых используются приведённые определения и понятия:

Задача 1. В результате исследования зависимости между сроком эксплуатации автомобиля и расходами на его ремонт получены следующие данные:

t , лет	1	2	3	4	5	6	7	8
S , тыс.руб.	120	140	230	370	445	570	655	770

Найти: 1) линейную зависимость стоимости ремонта автомобиля от срока эксплуатации; 2) предполагаемую величину затрат на ремонт за 10-й год эксплуатации.

Решение:

Найдём необходимые для расчёта суммы $\sum_{i=1}^n x_i$, $\sum_{i=1}^n y_i$, $\sum_{i=1}^n x_i y_i$, $\sum_{i=1}^n x_i^2$.

Промежуточные вычисления оформим в виде вспомогательной таблицы.

i	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2
1	1	120	120	1
2	2	140	280	4
3	3	230	690	9
4	4	370	1480	16
5	5	445	2225	25
6	6	570	3420	36
7	7	655	4585	49
8	8	770	6160	64
Σ	36	3300	12960	204

По формуле (2) составляем систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} 204a + 36b = 18960 \\ 36a + 8b = 3300 \end{cases}$$

Её решение $a = \frac{685}{7}$, $b = -\frac{195}{7}$ даёт искомую зависимость: $y = \frac{685}{7}x - \frac{195}{7}$

2) При $x = 10$ получим $y(10) = \frac{6655}{7} \approx 950,7$.

Ответ: $y = \frac{685}{7}x - \frac{195}{7}$; $y(10) \approx 950,7$

Задача 2. Имеются следующие данные о расходах на рекламу x (тыс. усл. ед.) и сбыте продукции y (тыс. ед.).

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,6	4,0	7,4	12,0	18,0

Методом наименьших квадратов построить линейную зависимость и сравнить её с квадратичной зависимостью.

Решение:

Найдём необходимые для расчёта суммы $\sum_{i=1}^n x_i$, $\sum_{i=1}^n x_i^2$, $\sum_{i=1}^n x_i^3$, $\sum_{i=1}^n x_i^4$, $\sum_{i=1}^n y_i$,

$\sum_{i=1}^n x_i y_i$, $\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i$. Промежуточные вычисления оформим в виде

вспомогательной таблицы.

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	1	1,6	1	1	1	1,6	1,6
2	2	4,0	4	8	16	8,0	16,0
3	3	7,4	9	27	81	22,2	66,6
4	4	12,0	16	64	256	48,0	192,0
5	5	18,0	25	125	625	90,0	450,0
Σ	15	43	225	225	979	169,8	726,2

Система нормальных уравнений в случае линейной зависимости имеет вид:

$$\begin{cases} 55a + 15b = 169,8 \\ 15a + 5b = 43 \end{cases}$$

Её решение $a = 4,08$; $b = -3,64$ даёт искомую зависимость:

$$y = 4,08x - 3,64 .$$

Система нормальных уравнений в случае квадратичной зависимости имеет вид:

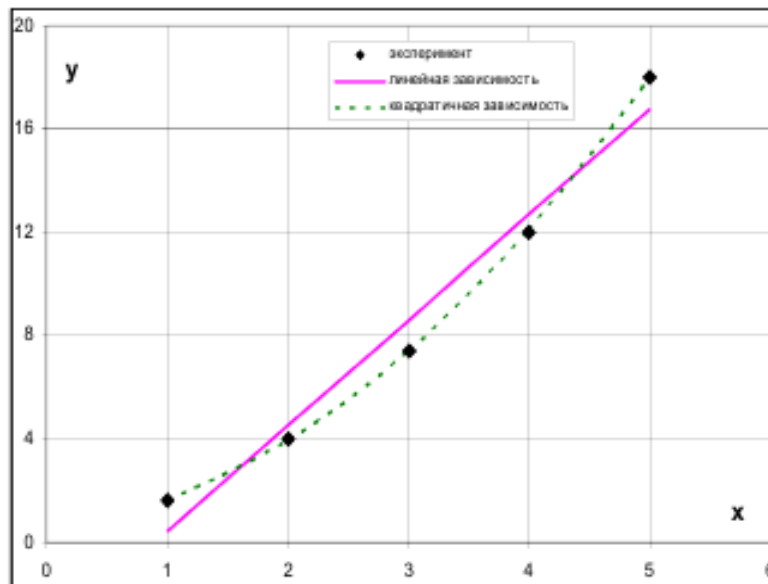
$$\begin{cases} 979a + 225b + 55c = 726,2 \\ 225a + 55b + 15c = 169,8 \\ 55a + 15b + 5c = 43 \end{cases}$$

Её решение $a = 0,6$; $b = 0,48$; $c = 0,56$ даёт искомую зависимость:

$$y = 0,6x^2 + 0,48x + 0,56 .$$

Сравним величины $S = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2$ для найденных линейной и квадратичной зависимостей. Для линейной зависимости $S = 5,056$, для квадратичной $S = 0,016$. Следовательно, квадратичная зависимость

предпочтительнее. Данное утверждение также следует из графика, на котором нанесены начальные данные, построены линейная и квадратичная зависимости.



Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Имеются следующие данные о цене на нефть x (ден. ед.) и индекс акций нефтяных компаний y (усл. ед.).

x	17,28	17,05	18,30	18,80	19,20	18,50
y	537	534	550	555	560	552

Предполагая, что между переменными x и y существует линейная зависимость, найти эмпирическую формулу вида $y = ax + b$, используя метод наименьших квадратов.

Ответ: $y = 12,078x + 328,32$

Вывод: С увеличением цены нефти на 1 ден.ед. индекс акций нефтяных компаний в среднем растёт на 12,08 ед.

Задача 2. Получить линейную зависимость $y = ax + b$ по следующим данным:

x	1	2	3	4	5	6
y	6	8	10	9	12	11

Ответ: $y = \frac{36}{35}x + \frac{86}{15}$

Задача 3. Получить линейную зависимость $P = aQ + b$ по следующим

данным:

Q	48	10	28	38	13	23
P	2,5	0,7	1,5	2,1	0,7	1,5

Ответ: $P = 0,051Q + 0,148$

Задача 4. Прибыль предприятия за некоторый период деятельности по годам приведена ниже:

Год, t	1	2	3	4	5	6	7
Прибыль, Π	54	57	62	65	67	69	70

Требуется:

- составить квадратичную зависимость прибыли по годам деятельности предприятия;
- определить ожидаемую прибыль для 8 – го года деятельности.

Ответ: а) $\Pi = -0,321t^2 + 5,321t + 48$; б) $\Pi(8) \approx 71$

Задача 5. Фирма, выпускающая компьютерную технику, провела опрос дилеров и получила следующие сведения о спросе Q на свою продукцию в зависимости от цены P . Найти квадратичную зависимость для следующих данных:

P , тыс.руб.	1,7	1,9	2,0	2,1
Q , тыс.шт.	27	25	19	9

Ответ: $Q = 0,02P^2 - 16,64P - 6,67$

ГЛАВА 2. «НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ»

§1. Неопределенный интеграл. Основные понятия

Занимаясь дифференцированием функции, мы ставили перед собой следующую задачу: по данной функции найти её производную. Теперь перейдем к изучению обратной задачи: найти функцию, зная её производную. Решение этой задачи имеет очень большое значение для дальнейшего изучения анализа и его приложений.

Определение 1. Первообразной от функции $y = f(x)$ называется функция $F(x)$, производная которой равна данной функции: $F'(x) = f(x)$

Пример. Пусть $y = x^2$. Для какой функции x^2 служит производной?

Очевидно, для $\frac{x^3}{3}$: $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$. Поэтому первообразной от функции

x^2 является функция $\frac{x^3}{3}$. Но не только она. Например:

$\frac{x^3}{3} + 5$, $\frac{x^3}{3} - 100$, $\frac{x^3}{3} + C$, где C – произвольная постоянная.

Вывод: Первообразных у данной функции бесчисленное множество, а производных у данной функции одна.

Определение 2. Если $F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$, то выражение $F(x) + C$ называется неопределённым интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$.

По определению: $\int f(x)dx = F(x) + C$, если $F'(x) = f(x)$.

При этом: знак $\int$ называется знаком интеграла; $f(x)$ – подынтегральная функция; выражение $f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

Действие, с помощью которого по данной функции $f(x)$ находим её первообразную $F(x)$, называется интегрированием функции $f(x)$.

Найти неопределенный интеграл от функции — это значит найти все первообразные от нее (для чего достаточно указать одну из них). Поэтому и говорят *неопределенное интегрирование*, что при этом не указывается, какая именно из первообразных имеется ввиду.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а дифференциал – подынтегральному выражению

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \quad d\int f(x)dx = f(x)dx$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала непрерывно дифференцируемой функции равен самой этой функции

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C$$

Таким образом, знаки ***d*** и $\int$ следующие друг за другом в том или ином порядке взаимно уничтожают друг друга за исключением постоянного слагаемого во 2-ом свойстве.

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла. Если

$$a = \text{const}, \text{ то } \int af(x)dx = a \int f(x)dx$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен сумме их интегралов

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

5. Если две функции или два дифференциала тождественны, то неопределенные интегралы от них могут отличаться лишь на постоянное слагаемое.

Таблица интегралов

Здесь $U = U(x)$	Здесь x - аргумент
1. $\int 0 \cdot dx = C$	
2. $\int du = u + C$	$\int dx = x + C$
3. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
4. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
6. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
7. $\int e^u du = e^u + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
8. $\int \sin u du = -\cos u + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
9. $\int \cos u du = \sin u + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
10. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln \cos u + C$	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$
11. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln \sin u + C$	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$
12. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
13. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
14. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$	$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
15. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C$
16. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C$	$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left \frac{x-1}{x+1} \right + C$
17. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right + C$

§2. Непосредственное интегрирование

Вычисление интегралов с помощью непосредственного использования таблицы основных интегралов называется *непосредственным интегрированием*.

Задача 1. (разобрать решение)

$$\begin{aligned} & \int \left(5 \cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2 + 1} \right) dx = \\ & = 5 \int \cos x dx + 2 \int dx - 3 \int x^2 dx + \int \frac{1}{x} dx - 4 \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \\ & = 5 \sin x + 2x - \frac{3x^3}{3} + \ln x - 4 \operatorname{arctg} x + C \end{aligned}$$

Задача 2. (разобрать решение)

$$\begin{aligned} & \int \left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} \right) dx = \int x^2 dx + 3 \int x dx + \int \frac{1}{x} dx = \\ & = \frac{x^{2+1}}{2+1} + 3 \frac{x^{1+1}}{1+1} + \ln|x| + c = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + c \end{aligned}$$

Задача 3. (разобрать решение)

$$\begin{aligned} & \int \left(3\sqrt[4]{x^3} + \frac{6}{x^2} \right) dx = \int 3\sqrt[4]{x^3} dx + \int \frac{6}{x^2} dx = 3 \int \sqrt[4]{x^3} dx + 6 \int \frac{dx}{x^2} = 3 \int x^{\frac{3}{4}} dx + 6 \int x^{-2} dx = \\ & = 3 \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + 6 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = 3 \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + 6 \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{3 \cdot 4 x^{\frac{7}{4}}}{7} - \frac{6}{x} + c = \frac{12}{7} \sqrt[4]{x^7} - \frac{6}{x} + c \end{aligned}$$

Задача 4. (разобрать решение)

$$\begin{aligned} & \int \frac{x-2}{x^3} dx = \int \left(\frac{x}{x^3} - \frac{2}{x^3} \right) dx = \int \frac{x}{x^3} dx - \int \frac{2}{x^3} dx = \int \frac{dx}{x^2} - 2 \int \frac{dx}{x^3} = \\ & = \int x^{-2} dx - 2 \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - 2 \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{2x^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + c \end{aligned}$$

Задача 5. (разобрать решение)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}}{x} dx &= \int \left(\frac{x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}}}{x} \right) dx = \int \left(\frac{x^{\frac{4}{3}}}{x} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} \right) dx = \int \frac{x^{\frac{4}{3}}}{x} dx + \int \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} dx + \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} dx = \\
&= \int x^{\frac{4}{3}-1} dx + \int x^{\frac{2}{3}-1} dx + \int x^{\frac{1}{2}-1} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx + \int x^{-\frac{1}{3}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \\
&= \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + C
\end{aligned}$$

Задача 6. (решить самостоятельно)

Найти интегралы:

- 1) $\int (x^3 - 3x^2 + 5x - 4) dx;$
- 2) $\int \left(\frac{2}{x} + \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx.$
- 3) $\int \frac{10x^8 - 3}{x^4} dx$

Задача 7. (решить самостоятельно)

Найти интегралы:

- 1) $\int \frac{(x^2 - 1)^2}{x^3} dx;$
- 2) $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2} \right) dx.$

Указание. В первом интеграле числитель возвести в квадрат, полученный многочлен, почленно, разделить на знаменатель и после этого проинтегрировать каждое слагаемое.

Во втором интеграле раскрыть скобки, выполнить преобразования, после чего проинтегрировать.

Задача 8. (разобрать решение). Найти интеграл: $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx.$

Решение:

Иногда, с целью сведения подынтегральной функции к табличному интегралу, используют так называемый искусственный прием (прибавляют и вычитают одно и то же число в числителе с целью создания слагаемого, кратного знаменателю).

В данном случае в числителе прибавляют и вычитают 1.

$x^2 = x^2 + 0 = x^2 + 1 - 1 = x^2 -$ выражение не изменилось, но теперь можно преобразовать подынтегральную функцию:

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{1+x^2} = \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2} = \frac{x^2+1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

Теперь проинтегрируем полученное выражение:

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \int 1 dx - \int \frac{1 dx}{1+x^2} = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + c.$$

Задача 9. (решить самостоятельно)

Найти интегралы:

1. $\int \left(2\sqrt{x} + \frac{1}{3}\cos x\right) dx$

2. $\int \left(\frac{e^x}{2} + \frac{3}{x} + 1\right) dx$

3. $\int \left(\frac{2}{1+x^2} + \sin x\right) dx$

4. $\int x(x^2 + 2) dx$

5. $\int (a^x + \sqrt[3]{x^2}) dx$

6. $\int \frac{4x + x^2}{x^3} dx$

7. $\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

8. $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^3}} dx$

Задача 10. (решить самостоятельно)

Найти интегралы:

1) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx;$

2) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx;$

$$3) \int \frac{x^4}{1+x^2} dx.$$

Указание. Для решения примеров 1 и 2 использовать тригонометрические формулы:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти интегралы:

1.	1) $\int \left(x^2 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx$	2) $\int \frac{5x^7 - 2}{x^3} dx$
2.	1) $\int \frac{x+5}{x^3} dx$	2) $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3} dx$
3.	1) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$	2) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx$
4.	1) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x} dx$	2) $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$
5.	1) $\int a^x \left(1 + \frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}} \right) dx$	2) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$
6.	1) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$	2) $\int \frac{3 - 2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx$
7.	1) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$	2) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$
8.	1) $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$	2) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

Задача 2. Найти интегралы:

1.	1) $\int \frac{(x^2-1)^2}{x^3} dx$	2) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) dx$
2.	1) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^3}} dx$	2) $\int \frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{x^2} dx$
3.	1) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx$	2) $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$

4.	1) $\int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx$	2) $\int a^x \left(1 + \frac{a^{-x}}{x^5} \right) dx$
5.	1) $\int \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx$	2) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$

§3. Интегрирование подстановкой

Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла, т.е. перейти к непосредственному интегрированию. Такой метод называется методом подстановки или методом замены переменной, он является одним из наиболее эффективных и распространенных методов интегрирования.

Введем подстановку: $x = \varphi(u)$, $dx = \varphi'(u) du$.

Для приведения интеграла к новой переменной необходимо привести к новой переменной подынтегральное выражение

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(u)] \varphi'(u) du, \quad \text{где } x = \varphi(u) \quad (1)$$

Соотношение (1) называется *формулой замены переменной*.

Замечание. При интегрировании иногда целесообразно подбирать замену переменного не в виде $x = \varphi(u)$, а $u = \varphi(x)$. Чаще всего это возможно в случае, если подынтегральное выражение можно разбить на два сомножителя, один из которых представляет собой дифференциал функции $\varphi(x)$.

Алгоритм метода

1. Обозначить аргумент функции новой переменной u , где u – есть функция от x .
2. Найти $du = u' dx$ (2).
3. Из равенства (2) выразить подынтегральное выражение, исключив функцию, которая была обозначена за u .
4. Осуществить замену под знаком интеграла, вынося const за знак.

5. Полученный интеграл взять по таблице.
6. Вернуться к прежней переменной x .

Примеры решения задач

Задача 1.

$$\int e^{2x+3} dx = \left| \begin{array}{l} \int e^u du = e^u + C \\ u = 2x + 3 \\ du = 2dx \\ dx = \frac{du}{2} \end{array} \right| = \int e^u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{2x+3} + C$$

Задача 2. Найти интегралы по образцу задачи 1.

а) $\int e^{5x+1} dx$

б) $\int e^{4-\frac{x}{3}} dx$

в) $\int \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} \right) dx$

Задача 3.

$$\int (2-3x)^3 dx = \left| \begin{array}{l} \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1 \\ u = 2-3x \\ du = -3dx \\ dx = -\frac{du}{3} \end{array} \right| = \int u^3 \cdot \left(-\frac{du}{3} \right) = -\frac{1}{3} \int u^3 du =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{u^4}{4} + C = -\frac{1}{12} u^4 + C = -\frac{1}{12} (2-3x)^4 + C = -\frac{(2-3x)^4}{12} + C$$

Задача 4. Найти интегралы по образцу задачи 3.

а) $\int \left(\frac{x}{2} + 3 \right)^2 dx$

б) $\int 4(5+6x)^{\frac{3}{2}} dx$

в) $\int \sqrt{4x+1} dx$

г) $\int \sqrt[5]{(3-5x)^4} dx$

Замечание: Сначала необходимо преобразовать

в) $\int \sqrt{4x+1} dx = \int (4x+1)^{1/2} dx = \dots$

$$\Gamma) \int \sqrt[5]{(3-5x)^4} dx = \int (3-5x)^{4/5} dx = \dots$$

Задача 5.

$$\int \cos 2x dx = \left. \begin{array}{l} \int \cos u du = \sin u + C \\ u = 2x \\ du = 2dx \\ dx = \frac{du}{2} \end{array} \right| = \int \cos u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \cos u du = \frac{1}{2} \sin u + C = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

Задача 6. Найти интегралы по образцу задачи 5.

а) $\int 4 \sin 5x dx$

б) $\int \cos \frac{x}{3} dx$

в) $\int 7 \sin(6-7x) dx$

Замечание:

а) Используем табличную формулу $\int \sin u du = -\cos u + C$, $u = 5x$

б) Используем табличную формулу $\int \cos u du = \sin u + C$, $u = \frac{x}{3}$

в) Используем табличную формулу $\int \sin u du = -\cos u + C$, $u = 6-7x$

Задача 7.

$$\int \frac{dx}{\cos^2 5x} = \left. \begin{array}{l} \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C \\ u = 5x \\ du = 5dx \\ dx = \frac{du}{5} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{du}{5}}{\cos^2 u} = \frac{1}{5} \int \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{1}{5} \operatorname{tg} u + C = \frac{1}{5} \operatorname{tg} 5x + C$$

Задача 8. Найти интегралы по образцу задачи 7

а) $\int \frac{6dx}{\cos^2 4x}$

б) $\int \frac{5dx}{\sin^2 3x}$

в) $\int \frac{-3dx}{\cos^2 \left(2 - \frac{x}{3}\right)}$

Замечание:

а) Используем табличную формулу $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$, $u = 4x$

б) Используем табличную формулу $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$, $u = 3x$

в) Используем табличную формулу $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$, $u = 2 - \frac{x}{3}$

Задача 9.

$$\int (x^2 + 5)^7 x dx = \left| \begin{array}{l} \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1 \\ u = x^2 + 5 \\ du = 2x dx \\ x dx = \frac{du}{2} \end{array} \right| = \int u^7 \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^7 du =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^8}{8} + C = \frac{u^8}{16} + C = \frac{(x^2 + 5)^8}{16} + C$$

Для данного интеграла: $u = x^2 + 5$, $n = 7$

Из выражения $du = 2x dx$ выражаем не dx а оставшуюся часть подынтегрального выражения после того как обозначили

$u = x^2 + 5$, т.е. $x dx = \frac{du}{2}$!!!

Задача 10.

$$\int x \sqrt{x^2 + 2} dx = \int x (x^2 + 2)^{\frac{1}{2}} dx \left| \begin{array}{l} \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1 \\ u = x^2 + 2 \\ du = 2x dx \\ x dx = \frac{du}{2} \end{array} \right| = \int u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{\sqrt{u^3}}{3} + C = \frac{\sqrt{(x^2 + 2)^3}}{3} + C$$

Замечание: Из выражения $du = 2x dx$ выражаем не dx а оставшуюся часть подынтегрального выражения после того как обозначили

$$u = x^2 + 2, \text{ т.е. } x dx = \frac{du}{2}$$

Задача 11. Найти интегралы по образцу задач 9,10.

$$\text{а) } \int \frac{4x \, dx}{\sqrt{x^2 + 4}} \quad \text{б) } \int \frac{x \, dx}{\sqrt[3]{(x^2 + 2)^2}} \quad \text{в) } \int \sqrt[3]{1 - 6x^5} x^4 \, dx$$

Замечание: Используем табличную формулу

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$$

$$\text{а) } u = x^2 + 4, \quad n = -\frac{1}{2}; \quad \text{б) } u = x^2 + 2, \quad n = -\frac{2}{3}; \quad \text{в) }$$

$$u = 1 - 6x^5, \quad n = \frac{1}{3}$$

Задача 12.

$$\int \frac{dx}{3-4x} = \left| \begin{array}{l} \int \frac{du}{u} = \ln u + C \\ u = 3-4x \\ du = -4dx \\ dx = -\frac{du}{4} \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{du}{4}}{u} = -\frac{1}{4} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{4} \ln|u| + C = -\frac{1}{4} \ln|3-4x| + C$$

Задача 13. Найти интегралы по образцу задачи 12

$$\text{а) } \int \frac{3dx}{4x-7} \quad \text{б) } \int \frac{2dx}{5-3x} \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\frac{2}{5}x-2}$$

Замечание:

$$\text{а) } \text{Используем табличную формулу } \int \frac{du}{u} = \ln u + C, \quad u = 4x - 7$$

$$\text{б) } \text{Используем табличную формулу } \int \frac{du}{u} = \ln u + C, \quad u = 5 - 3x$$

$$\text{в) } \text{Используем табличную формулу } \int \frac{du}{u} = \ln u + C, \quad u = \frac{2}{5}x - 2$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить интегралы:

1. $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$

2. $\int \sin^3 x \cos x dx$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x}}$

4. $\int \cos(a-bx) dx$

5. $\int \sqrt[3]{1+3x} dx$

6. $\int \sqrt[6]{1-2x^3} x^2 dx$

7. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$

8. $\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x} dx$

9. $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x} dx$

10. $\int e^{\sin x} \cos x dx$

11. $\int \frac{x^2 dx}{1-x^3}$

12. $\int \frac{dx}{(a-bx)^3}$

13. $\int \frac{dx}{1-10x}$

14. $\int \frac{e^{2x} dx}{1-3e^{2x}}$

15. $\int \operatorname{ctg} x dx$

16. $\int \operatorname{tg} x dx$

17. $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} dx$

18. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$

19. $\int \sin^2 x \cos x dx$

20. $\int \cos^3 x \sin x dx$

21. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^4 x}$

22. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x}$

23. $\int \frac{1-2\cos x}{\sin^2 x} dx$

24. $\int \sin x \cos x dx$

25. $\int e^{\cos x} \sin x dx$

26. $\int e^{x^3} x^2 dx$

27. $\int e^{-x^2} x dx$

28. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

29. $\int \sqrt{x^2+1} x dx$

30. $\int \sqrt[3]{x^3-8} x^2 dx$

$$31. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$$

$$32. \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$33. \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$$

$$34. \int \frac{\sqrt{1+\ln x} dx}{x}$$

$$35. \int \sqrt{1+4\sin x} \cos x dx$$

$$36. \int \sqrt[3]{1-6x^5} x^4 dx$$

§4. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе

Вспомним табличные формулы

$$14. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$$

где a - постоянная величина
(число)

$$15. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C$$

За переменную u принимается x

$$16. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

($u = x$)

$$17. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$$

1. Рассмотрим вычисление интегралов, используя формулы 14-17

$$2. \int \frac{dx}{x^2 + 9} = \int \frac{dx}{x^2 + 3^2} = \left. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + c \right|_{\substack{a=3 \\ u=x}} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dx}{2^2 - x^2} = \left. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + c \right|_{\substack{a=2 \\ u=x}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{2} + C$$

$$4. \int \frac{dx}{x^2 - 25} = \int \frac{dx}{x^2 - 5^2} = \left| \begin{array}{l} \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c \\ a = 5 \\ u = x \end{array} \right| = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{x-5}{x+5} \right| + C$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5}} = \left| \begin{array}{l} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + c \\ a^2 = 5 \\ u = x \end{array} \right| = \ln |x + \sqrt{x^2 + 5}| + C$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти интегралы:

$$1. \int \frac{dx}{x^2 + 7}$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}}$$

$$3. \int \frac{dx}{x^2 - 16}$$

$$4. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$5. \int \left(\frac{3}{x^2 + 3} + \frac{6}{x^2 - 3} \right) dx$$

$$6. \int \left(\frac{1}{\sqrt{2 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{2 + x^2}} \right) dx$$

2. Рассмотрим интегралы вида: а) $\int \frac{dx}{x^2 + px + q}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}}$

где p и q – постоянные числа.

Алгоритм решения

1. Трехчлен, стоящий в знаменателе, преобразовать в сумму или разность квадратов.

Выделение полного квадрата: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Выполним преобразование:

$$x^2 + px + q = \left[x^2 + 2x \cdot \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2} \right)^2 \right] - \left(\frac{p}{2} \right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + \left[q - \left(\frac{p}{2} \right)^2 \right]$$

Получили формулу:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + \left[q - \left(\frac{p}{2} \right)^2 \right] \quad (1)$$

2. Вычисляем интеграл по формулам (14-17) таблицы интегралов

Задача 1. Вычислить интеграл: $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 14}$

Трёхчлен, стоящий в знаменателе, преобразуем в сумму или разность квадратов по формуле (1).

$$p = 4; q = 14;$$

$$x^2 + 4x + 14 = \left(x + \frac{4}{2} \right)^2 + \left[14 - \left(\frac{4}{2} \right)^2 \right] = (x + 2)^2 + [14 - 4] = (x + 2)^2 + 10$$

$x^2 + 4x + 14 = (x + 2)^2 + (\sqrt{10})^2$ - представили квадратный трёхчлен в виде суммы квадратов, получили интеграл, который находим по формуле (14) таблицы интегралов.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 14} &= \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + (\sqrt{10})^2} = \left| \begin{array}{l} \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + c \\ a = \sqrt{10} \\ u = x + 2 \quad du = dx \end{array} \right| = \int \frac{du}{u^2 + (\sqrt{10})^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{10}} + C = \frac{1}{\sqrt{10}} \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{\sqrt{10}} + C \end{aligned}$$

Задача 2. Вычислить интеграл: $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$ (решить самостоятельно)

$$\textbf{Ответ: } \operatorname{arctg}(x + 2) + C$$

Задача 3. Вычислить интеграл: $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}$ (решить самостоятельно)

Ответ: $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + C$

Задача 4. Вычислить интеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$

Трехчлен, стоящий в знаменателе под корнем, преобразовать в сумму или разность квадратов по формуле (1).

$$p = 2; q = 3;$$

$$x^2 + 2x + 3 = \left(x + \frac{2}{2}\right)^2 + \left[3 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] = (x+1)^2 + [3-1] = (x+1)^2 + 2$$

$x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$ - представили квадратный трёхчлен в виде суммы двух слагаемых, получили интеграл, который находим по формуле (17) таблицы интегралов, следовательно число 2 можно не представлять в виде квадрата.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 + 2}} = \left. \begin{array}{l} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + c \\ a^2 = 2 \\ u = x+1 \quad du = dx \end{array} \right| = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 2}} = \\ &= \ln|u + \sqrt{u^2 + 2}| + C = \ln|x+1 + \sqrt{(x+1)^2 + 2}| + C = \ln|x+1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3}| + C \end{aligned}$$

Задача 5. Вычислить интеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$

Преобразуем данный интеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2 + 2x - 1)}}$

Трехчлен, стоящий в знаменателе под корнем в скобках, преобразуем в сумму или разность квадратов по формуле (1).

$$p = 2; q = -1;$$

$$x^2 + 2x - 1 = \left(x + \frac{2}{2}\right)^2 + \left[-1 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] = (x+1)^2 + [-1-1] = (x+1)^2 - 2 = (x+1)^2 - (\sqrt{2})^2$$

$x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - (\sqrt{2})^2$ - представили квадратный трёхчлен в виде разности двух квадратов. Выполнив преобразования получим интеграл, который находим по формуле (15) таблицы интегралов.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+2x-1)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x+1)^2 + (\sqrt{2})^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - (x+1)^2}} \\ &= \left| \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C \right| \\ &= \left| \begin{array}{l} a = \sqrt{2} \\ u = x+1 \quad du = dx \end{array} \right| = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{\sqrt{2}} + C = \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C \end{aligned}$$

Задача 6. Вычислить интеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$ (решить самостоятельно)

Ответ: $\arcsin \frac{x+2}{3} + C$

§5. Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – две функции от x , имеющие непрерывные производные. Найдем дифференциал произведения **uv**

$$d(uv) = u dv + v du \quad (1)$$

Интегрируя обе части (1), имеем

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du$$

$$uv = \int u dv + \int v du \quad \text{или}$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (2)$$

Формула (2) называется формулой интегрирования по частям. Она дает возможность свести вычисления интеграла $\int u dv$ к вычислению интеграла $\int v du$, который во многих случаях оказывается более простым.

При этом за u берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dv – та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден. Укажем некоторые часто встречающиеся интегралы, которые вычисляются методом интегрирования по частям.

1 мун:

$$\int \overset{u}{P_n(x)} \overset{dv}{e^{ax}} dx ; \quad \int \overset{u}{P_n(x)} \overset{dv}{\sin ax} dx; \quad \int \overset{u}{P_n(x)} \overset{dv}{\cos ax} dx$$

где $P_n(x)$ – многочлен.

За u принимаем многочлен $P_n(x)$, а за dv – соответственно выражения e^{ax} , $\sin ax$, $\cos ax$.

1 мун:

$$\int \overset{u}{P_n(x)} \overset{dv}{e^{ax}} dx$$

$$\int \overset{u}{P_n(x)} \overset{dv}{\sin ax} dx$$

$$\int \overset{u}{P_n(x)} \overset{dv}{\cos ax} dx$$

2 мун:

$$\int \overset{u}{P_n(x)} \ln ax \, dx$$

$$\int \overset{u}{P_n(x)} \overset{u}{\arcsin ax} \, dx$$

$$\int \overset{u}{P_n(x)} \overset{u}{\arccos ax} \, dx$$

$$\int \overset{u}{P_n(x)} \overset{u}{\arctg ax} \, dx$$

$$\int \overset{u}{P_n(x)} \overset{u}{\operatorname{arcctg} ax} \, dx$$

1 мун:

$P_n(x)$ – многочлен, a – постоянное число (коэффициент).

За u принимаем многочлен $P_n(x)$, а за dv – соответственно выражения e^{ax} , $\sin ax$, $\cos ax$.

2 мун:

$P_n(x)$ – многочлен, a – постоянное число (коэффициент).

За u принимаются соответственно функции, а за $dv = P_n(x)dx$.

Задача 1. Вычислить интеграл

$$\int x \cdot e^{3x+2} dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = (x)' dx = dx \\ du = dx \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} dv = e^{3x+2} dx \\ v = \frac{1}{3} e^{3x+2} \end{array} \left| \begin{array}{l} u \quad \overbrace{\quad}^v \\ = x \cdot \frac{1}{3} e^{3x+2} - \int \frac{1}{3} e^{3x+2} \cdot dx = \\ \\ \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{3} \cdot x \cdot e^{3x+2} - \frac{1}{3} \int e^{3x+2} \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot x \cdot e^{3x+2} - \frac{1}{9} \cdot e^{3x+2} + C$$

Указание: Для того чтобы найти v необходимо обе части равенства $dv = e^{3x+2} dx$ проинтегрировать, т.е. найти интегралы $\int dv = \int e^{3x+2} dx$.

Получим: $v = \frac{1}{3} e^{3x+2}$, здесь постоянную величину полагаем $C=0$ (для удобства дальнейшего решения)

Задача 2. Вычислить интеграл

$$\int x \ln 5x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln 5x \quad du = (\ln 5x)' dx = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx \quad v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln 5x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln 5x - \frac{1}{2} \int x dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln 5x - \frac{x^2}{4} + c$$

Задача 3. Вычислить интеграл

$$\int x e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad du = u' dx = dx \\ dv = e^x dx \quad v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c = e^x (x - 1) + c.$$

Задача 4. Вычислить интеграл

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \quad v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c.$$

Задача 5. Вычислить интеграл

$$\int (4x^3 + 6x - 7) \ln x dx = \ln x \cdot (x^4 + 3x^2 - 7x) - \int \frac{x^4 + 3x^2 - 7x}{x} dx =$$

$$\left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = (4x^3 + 6x - 7)dx \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} du = \frac{dx}{x} \\ v = x^4 + 3x^2 - 7x \end{array} \right| = \ln x \cdot (x^4 + 3x^2 - 7x) - \left(\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - 7x \right) + C$$

Задача 6. Вычислить интеграл

$$\int x^2 \cos 3x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = \cos 3x \, dx \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} du = 2x \, dx \\ v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right| =$$

Интегрирование по частям применим дважды, т.к. $u = x^2$ выражение второй степени:

$$= x^2 \left(\frac{1}{3} \sin 3x \right) - \int \frac{1}{3} \sin 3x \cdot 2x \, dx = \frac{x^2}{3} \sin 3x - \frac{2}{3} \int x \sin 3x \, dx =$$

Второй интеграл еще раз берем по частям:

$$\begin{aligned} &= \left| \begin{array}{l} u = x \\ dv = \sin 3x \, dx \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} du = dx \\ v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right| = \frac{x^2}{3} \sin 3x - \frac{2}{3} \left[x \cdot \left(-\frac{1}{3} \cos 3x \right) - \int \left(-\frac{1}{3} \right) \cos 3x \, dx \right] = \\ &= \frac{x^2}{3} \sin 3x - \frac{2}{3} \left[-\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \sin 3x \right] + c = \\ &= \frac{x^2}{3} \sin 3x + \frac{2}{9} x \cos 3x - \frac{2}{27} \sin 3x + c = \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{27} \right) \sin 3x + \frac{2}{9} x \cos 3x + c. \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти интегралы:

1. $\int (2x + 3)e^{5x} dx$

2. $\int x^2 \ln 3x dx$

3. $\int (2 - 4x) \sin 3x dx$

4. $\int (4x - 3) \cos 5x dx$

5. $\int x^2 \sin x dx$

6. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

7. $\int \arcsin x dx$

8. $\int (x^3 + 1) \ln x dx$

§6. Интегрирование простейших рациональных дробей

Интегрирование рациональных дробей $\frac{P(x)}{Q(x)}$ приводится к интегрированию простейших дробей четырех типов:

$$1. \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + c; \quad (1)$$

$$2. \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{A}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + c; \quad (2)$$

$$3. \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx, \quad (3)$$

где $D < 0$, т.е. знаменатель дроби имеет мнимые корни;

Для вычисления интегралов 3 типа используется следующий алгоритм:

1) В числителе дроби создать производную знаменателя:

$$(x^2 + px + q)' = 2x + p;$$

$$Ax + B = (2x + p) \cdot \frac{A}{2} + B - \frac{Ap}{2}.$$

2) Разбить интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)}{x^2+px+q} dx + \int \frac{B - \frac{Ap}{2}}{x^2+px+q} dx.$$

3) В первом интеграле приходим к натуральному логарифму знаменателя. В знаменателе дроби второго интеграла выделяем полный квадрат и приходим к табличному интегралу.

$$\text{Выделение полного квадрата: } (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

$$x^2 + px + q = \left[x^2 + 2x \cdot \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2} \right)^2 \right] - \left(\frac{p}{2} \right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + \left[q - \left(\frac{p}{2} \right)^2 \right].$$

Задача 1. Найти интегралы от рациональных дробей 1 типа:

$$\int \frac{2 dx}{x-6} \stackrel{(1)}{=} 2 \ln|x-6| + c;$$

$$\int \frac{4 dx}{x-2} \stackrel{(1)}{=} 4 \ln|x-2| + c.$$

Задача 2. Самостоятельно найти интегралы от рациональных дробей 1

типа: 1) $\int \frac{6 dx}{x+4}$; 2) $\int \frac{5 dx}{x-3}$; 3) $\int \frac{\frac{1}{2} dx}{x-7,5}$.

Задача 3. Найти интегралы от рациональных дробей второго типа:

$$\int \frac{3,5 dx}{(x-5)^4} \stackrel{(2)}{=} \frac{3,5}{1-4} \cdot \frac{1}{(x-5)^{4-1}} + c = \frac{-3,5}{3(x-5)^3} + c;$$

$$\int \frac{5 dx}{(x-6)^{\frac{3}{2}}} \stackrel{(2)}{=} \frac{5}{-\frac{3}{2}+1} \cdot \frac{1}{(x-6)^{\frac{3}{2}-1}} + c = \frac{-10}{\sqrt{x-6}} + c.$$

Задача 4. Найти интегралы от рациональных дробей 2 типа, используя формулу (2):

$$\int \frac{5,8 dx}{(x-1,6)^{47}}; \int \frac{49}{(x-4,5)^{2,5}}; \int \frac{10 dx}{(x-4)^3}.$$

Как можно найти интегралы 1, 2 типа, не используя формул (1), (2)?

Рассмотрим нахождение интеграла 3 типа: $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$.

Предварительно найдем интеграл $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$ ($A=0$, $B=1$),

используя формулу выделения полного квадрата в знаменателе.

Задача 5. Найти интеграл: $\int \frac{dx}{x^2+4x+14}$.

Решение. $x^2+4x+14=0$, $D=16-4 \cdot 14=-40 < 0$.

Для нахождения таких интегралов нам придется пользоваться формулами

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + c,$$

либо

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c.$$

1. Выделим полный квадрат в знаменателе дроби:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 14 &= (x^2 + 2x \cdot 2 + 2^2) - 2^2 + 14 = (x^2 + 4x + 4) - 4 + 14 = \\ &= (x+2)^2 + 10 = (x+2)^2 + (\sqrt{10})^2. \end{aligned}$$

2. Подставим в интеграл и применим формулу:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 14} &= \int \frac{dx}{(x+2)^2 + (\sqrt{10})^2} = \left| \begin{array}{l} u = x+2 \\ du = dx \\ a = \sqrt{10} \end{array} \right| = \int \frac{du}{u^2 + (\sqrt{10})^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{10}} + c = \frac{1}{\sqrt{10}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{10}} + c. \end{aligned}$$

Задача 6. Найти интеграл: $\int \frac{x+2}{x^2 + 3x + 4} dx$.

Решение. $x^2 + 3x + 4 = 0$, $D = 9 - 4 \cdot 4 = 9 - 16 = -7 < 0$.

Решаем по алгоритму нахождения интеграла от рациональных дробей 3 типа:

1) В числителе строим производную знаменателя:

$$(x^2 + 3x + 4)' = 2x + 3;$$

$$x + 2 = (2x + 3) \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 2 = (2x + 3) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.$$

2) Разобьем интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int \frac{x+2}{x^2 + 3x + 4} dx = \int \frac{(2x+3) \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{x^2 + 3x + 4} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+3)}{x^2 + 3x + 4} dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x^2 + 3x + 4} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x+3}{x^2+3x+4} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+3x+4}.$$

3) Находим первый интеграл:

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x+3}{x^2+3x+4} dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 + 3x + 4 \\ du = (2x+3) dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + c = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 3x + 4| + c$$

4) Находим второй интеграл (по образцу задачи 5).

Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 4 &= \left[x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right] - \left(\frac{3}{2} \right)^2 + 4 = \\ &= \left[x^2 + 2x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right] - \frac{9}{4} + 4 = \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} = \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 3x + 4} &= \int \frac{dx}{\left(x + \frac{3}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2} \right)^2} = \left| \begin{array}{l} u = x + \frac{3}{2} \\ du = dx \\ a = \frac{\sqrt{7}}{2} \end{array} \right| = \int \frac{du}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2} \right)^2} = \\ &= \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + c = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2\left(x + \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{7}} + c = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{7}} + c. \end{aligned}$$

Тогда из 3), 4) следует:

$$\int \frac{x+2}{x^2+3x+4} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+3x+4| + \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{7}} + c.$$

Задача 7. Решить по образцу:

$$1) \int \frac{2x+1}{x^2+2x+3} dx;$$

$$2) \int \frac{3x+4}{x^2+7x+14} dx;$$

$$3) \int \frac{2x-3}{x^2+x+5} dx.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 8. Вычислить интеграл:

1. $\int \frac{3x-11}{x^2+8x+18} dx$

2. $\int \frac{x+7}{x^2+11x+42} dx$

3. $\int \frac{dx}{x^2+x+5}$

4. $\int \frac{dx}{x^2+2x+6}$

5. $\int \frac{dx}{x^2+6x+15}$

6. $\int \frac{4x+5}{x^2-3x+7} dx$

§7. Метод неопределённых коэффициентов.

Определение 1. Дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется *рациональной*, если её числитель и знаменатель – многочлены (предполагаем, что коэффициенты многочленов действительные числа).

Определение 2. Дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется *правильной*, если степень многочлена $P(x)$, находящегося в числителе, меньше чем степень многочлена $Q(x)$, находящегося в знаменателе.

Определение 3. Если степень числителя дроби равна степени знаменателя или больше ее, то рациональная дробь называется *неправильной*.

Всякая неправильная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной дроби. Поэтому интегрирование рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ всегда может быть приведено к интегрированию многочлена и правильной дроби.

**Алгоритм нахождения интеграла методом неопределенных
коэффициентов**

- 1) Проверить, правильная ли дробь. Если дробь неправильная, то необходимо представить её в виде суммы многочлена и правильной дроби. Это достигается делением числителя на знаменатель по правилу деления многочлена на многочлен.
- 2) Знаменатель правильной дроби разложим на простейшие множители вида $(x - a)^n$ и $(x^2 + px + q)^m$.

3) Правильную рациональную дробь разложим на простейшие дроби:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n(x^2+px+q)^m} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n} +$$
$$+ \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{B_mx+C_m}{(x^2+px+q)^m}, \quad (1)$$

где $A_1, \dots, A_n$; $B_1, \dots, B_m$; $C_1, \dots, C_m$ – неопределенные коэффициенты, которые нужно вычислить.

- 4) Для вычисления неопределенных коэффициентов приводим равенство (1) к общему знаменателю, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества, и решаем систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов. Тем самым интегрирование рациональной дроби сводим к интегрированию суммы простейших рациональных дробей.

Задача 1. Определить, правильная ли дробь:

1) $\frac{x^2 - 5x + 3}{x^3 + 3x - 1}$; 2) $\frac{x^3 + x^2 + 9}{2x^3 + 3x^2 - x - 7}$; 3) $\frac{x^5 - 3x^2 + x + 10}{x^2 + x + 4}$; 4) $\frac{x}{x^2 + 3x + 4}$.

Задача 2. Представить в виде суммы многочлена и правильной дроби неправильную дробь:

$$\frac{x^4 - 3x^2 + 5x + 4}{x^2 - 8x + 5}.$$

Решение. Дробь неправильная, т.к. степень числителя больше степени знаменателя.

Разделим числитель на знаменатель по правилу деления многочленов.

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 - 3x^2 + 5x + 4 & x^2 - 8x + 5 \\
 \underline{x^4 - 8x^3 + 5x^2} & x^2 + 8x + 56 \\
 8x^3 - 8x^2 + 5x + 4 & \\
 \underline{8x^3 - 64x^2 + 40x} & \\
 56x^2 - 35x + 4 & \\
 \underline{56x^2 - 448x + 280} & \\
 413x - 276 &
 \end{array}$$

Таким образом:

$$\frac{x^4 - 3x^2 + 5x + 4}{x^2 - 8x + 5} = x^2 + 8x + 56 + \frac{413x - 276}{x^2 - 8x + 5}.$$

Задача 3. Найти интеграл: $\int \frac{3x+1}{x^2+x-6} dx$.

Решение. 1. Дробь правильная, т.к. степень числителя меньше степени знаменателя.

1. Разложим знаменатель на простейшие множители:

$$x^2 + x - 6 = 0;$$

$$D = 1 - 4 \cdot (-6) = 25 > 0 - \text{два действительных корня.}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3).$$

2. Представим подынтегральную функцию в виде суммы двух простейших дробей:

$$\frac{3x+1}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}.$$

3. Найдем коэффициенты A и B . Для этого приведем дроби к общему знаменателю и воспользуемся правилом равенства дробей:

$$\frac{3x+1}{(x-2)(x+3)} = \frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)};$$

$$3x+1 = A(x+3)+B(x-2);$$

$$3x+1 = Ax+3A+Bx-2B;$$

$$3x+1 = x(A+B)+3A-2B.$$

Приравниваем коэффициенты при x и свободные члены. Составим систему уравнений и найдем A и B :

$$\begin{cases} 3 = A + B \\ 1 = 3A - 2B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 - B \\ 1 = 3(3 - B) - 2B \Rightarrow 1 = 9 - 5B \end{cases}$$

$$5B = 8 \Rightarrow B = \frac{8}{5}, \quad A = \frac{7}{5}.$$

Решив систему, получили $A = \frac{7}{5}$; $B = \frac{8}{5}$. Таким образом:

$$\frac{3x+1}{(x-2)(x+3)} = \frac{\frac{7}{5}}{x-2} + \frac{\frac{8}{5}}{x+3}.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+1}{x^2+x+6} dx &= \int \left(\frac{\frac{7}{5}}{x-2} + \frac{\frac{8}{5}}{x+3} \right) dx = \frac{7}{5} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{8}{5} \int \frac{dx}{x+3} = \\ &= \frac{7}{5} \ln|x-2| + \frac{8}{5} \ln|x+3| + C. \end{aligned}$$

Задача 4. Найти интеграл: $\int \frac{11x+16}{(x-1)(x+2)} dx$.

Решение. 1. Дробь правильная. Знаменатель разложен на множители.

2. Правильную рациональную дробь разложим на простейшие дроби по формуле (1):

$$\frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}.$$

3. Найдем коэффициенты A , B , C . Для этого приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1)}{(x-1)(x+2)^2}.$$

По правилу равенства дробей:

$$11x+16 = A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1);$$

$$11x+16 = A(x^2 + 4x + 4) + B(x^2 + x - 2) + C(x-1);$$

$$11x+16 = Ax^2 + 4Ax + 4A + Bx^2 + Bx - 2B + Cx - C.$$

Приведем подобные члены в правой части тождества:

$$11x+16 = (A+B)x^2 + (4A+B+C)x + (4A-2B-C).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x и свободные члены в левой и правой части. Так как в левой части нет x^2 , то его коэффициент равен 0 ($0 \cdot x^2 = 0$).

$$\begin{cases} 0 = A+B \\ 11 = 4A+B+C \\ 16 = 4A-2B-C \end{cases}; \begin{cases} A = -B \\ 11 = -4B+B+C \\ 16 = -4B-2B+C \end{cases}; \begin{cases} A = -B \\ C = 11+3B \\ C = -16-6B \end{cases}; \begin{cases} A = -B \\ C = 11+3B \\ 16+11+9B = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9B = -27 \Rightarrow B = -3; \quad C = 11 - 3 \cdot 3 = 2; \quad A = 3.$$

Таким образом, решив систему, получим:

$$A = 3; \quad B = -3; \quad C = 2.$$

Тогда

$$\frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{3}{x-1} - \frac{3}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2};$$

$$\begin{aligned} \int \frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2} dx &= \int \left(\frac{3}{x-1} - \frac{3}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} \right) dx = \\ &= 3 \int \frac{dx}{x-1} - 3 \int \frac{dx}{x+2} + 2 \int \frac{dx}{(x+2)^2} = 3 \ln|x-1| - 3 \ln|x+2| - \frac{2}{x+2} + c. \end{aligned}$$

Задача 5. Найти интеграл методом неопределенных коэффициентов:

$$\int \frac{dx}{x^3 + 4x}.$$

Решение. 1. Дробь правильная.

2. Разложим знаменатель на множители:

$$x^3 + 4x = x(x^2 + 4).$$

3. Представим подынтегральную функцию в виде суммы двух простейших дробей:

$$\frac{1}{x^3 + 4x} = \frac{1}{(x^2 + 4)x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}.$$

4. Найдем коэффициенты A, B, C :

$$\frac{1}{x(x^2 + 4)} = \frac{A(x^2 + 4) + (Bx + C)x}{x(x^2 + 4)};$$

$$1 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)x;$$

$$1 = Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx;$$

$$1 = (A + B)x^2 + Cx + 4A.$$

Приравниваем коэффициенты при x^2 , x и свободные члены. Так как в левой части нет x^2 , x , то их коэффициенты равны 0.

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ 0 = C \\ 1 = 4A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = A + B \\ C = 0 \\ A = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{4} \\ C = 0 \\ A = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Таким образом:

$$\frac{1}{x(x^2 + 4)} = \frac{\frac{1}{4}}{x} - \frac{\frac{1}{4}x}{x^2 + 4}.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{x^3 + 4x} = \int \frac{\frac{1}{4} dx}{x} - \int \frac{\frac{1}{4} x dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{4} \int \frac{x dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{8} \ln|x^2 + 4| + c.$$

Задача 6. Найти интегралы методом неопределенных коэффициентов:

1) $\int \frac{x dx}{x^2 + 5x + 4}$

2) $\int \frac{6 dx}{x^2 - 3x + 2}$

3) $\int \frac{dx}{(x-3)(x-1)}$

4) $\int \frac{dx}{x^3 + 8}$

5) $\int \frac{(x-1) dx}{(x+5)(x+1)}$

6) $\int \frac{3x+5}{x^2 + 8x + 15} dx$

7) $\int \frac{dx}{4 - x^2}$

8) $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$

Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы:

Задача 7. $\int \frac{4x-3}{x^2 + 3x - 4} dx.$

Задача 8. $\int \frac{dx}{x^2 + 8x + 7}.$

Задача 9. $\int \frac{11x-4}{x^2 + 2x - 8} dx.$

Задача 10. $\int \frac{3x^3 - 10x^2 - 11x + 21}{x^2 - 5x + 4} dx.$

Указание. Подынтегральную функцию представить в виде суммы многочлена и правильной дроби (см. задачу 2). Правильную дробь разложить на множители, используя метод неопределенных коэффициентов, проинтегрировать.

Задача 11. Найти интеграл: $\int \frac{dx}{x^3 - 1}.$

Указание. а) знаменатель разложить на множители (разность кубов);

б) используя метод неопределенных коэффициентов, получить два интеграла 1 и 3 типов;

в) проинтегрировать по алгоритму.

Задача 12. Найти интеграл: $\int \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} dx$.

Найти интегралы, используя метод неопределенных коэффициентов:

Задача 13. $\int \frac{x+4}{x^2+x-2} dx$.

Задача 14. $\int \frac{dx}{x(x+3)}$.

Задача 15. $\int \frac{-4x}{x^2-9x+18} dx$.

§8. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

1. Интегрирование выражений вида: $f(x) = (\sin x)^{2k} \cdot (\cos x)^{2k+1}$.

2. Интегрирование выражений вида: $f(x) = (\cos x)^{2k} (\sin x)^{2k+1}$.

1) $\int (\sin x)^{2k} \cdot (\cos x)^{2k+1} dx$.

Показатель степени косинуса $(2k+1)$ – нечетное положительное число. В этом случае подынтегральное выражение преобразовываем так: из $(\cos x)^{2k+1}$ выделяем первую степень косинуса и получаем:

$$(\cos x)^{2k+1} = (\cos x)^{2k} \cdot \cos x = (\cos^2 x)^k \cdot \cos x,$$

т.к. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то, заменив $\cos^2 x$, получим

$$(\cos x)^{2k+1} = (1 - \sin^2 x)^k \cos x \Rightarrow$$

$$\int (\sin x)^{2k} (\cos x)^{2k+1} dx = \int (\sin x)^{2k} (1 - \sin^2 x)^k \cos x dx =$$

Применив подстановку, получим интеграл:

$$= \left| \begin{array}{l} u = \sin x \\ du = \cos x \, dx \end{array} \right| = \int u^{2k} (1 - u^2)^k \, du,$$

и решение сведется к интегрированию суммы степенных функций.

$$2) \quad \int (\cos x)^{2k} (\sin x)^{2k+1} \, dx.$$

В этом случае показатель степени синуса $(2k+1)$ – нечетное положительное число.

Из $(\sin x)^{2k+1}$ выделяем первую степень синуса и получаем:

$$(\sin x)^{2k+1} = (\sin x)^{2k} \sin x = (\sin^2 x)^k \sin x = (1 - \cos^2 x)^k \sin x.$$

Интеграл запишется так:

$$\int (\cos x)^{2k} (1 - \cos^2 x)^k \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin x \, dx \end{array} \right| = -\int u^{2k} (1 - u^2)^k \, du,$$

и вопрос опять-таки сведется к интегрированию суммы степенных функций.

$$3) \quad \int \sin^{2n} x \, dx; \quad \int \cos^{2n} x \, dx, \quad n - \text{целое}, \quad n > 0.$$

При нахождении данных интегралов применяются формулы понижения степени, которые позволяют привести рассматриваемые интегралы к табличным:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x); \tag{1}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x). \tag{2}$$

$$4) \quad \int \sin kx \cos \ell x \, dx; \quad \int \cos kx \cos \ell x \, dx; \quad \int \sin kx \sin \ell x \, dx, \text{ где}$$

k, ℓ – действительные числа.

Для нахождения данных интегралов, подынтегральные функции заменяем, используя формулы произведений тригонометрических функций:

$$\sin kx \cos \ell x = \frac{1}{2} [\sin(k - \ell)x + \sin(k + \ell)x]; \tag{3}$$

$$\cos kx \cos \ell x = \frac{1}{2} [\cos(k - \ell)x + \cos(k + \ell)x]; \quad (4)$$

$$\sin kx \sin \ell x = \frac{1}{2} [\cos(k - \ell)x - \cos(k + \ell)x]. \quad (5)$$

Задача 1. Вычислить интегралы:

$$1) \quad \int \sin^3 x \, dx;$$

$$2) \quad \int \cos^5 x \, dx;$$

$$3) \quad \int \cos^2 x \, dx.$$

Решение. 1) $\int \sin^3 x \, dx.$

Представим $\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x = (1 - \cos^2 x) \sin x.$

$$\int \sin^3 x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = \left. \begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin x \, dx \\ \sin x \, dx = -du \end{array} \right| = \int (1 - u^2) \cdot (-du) =$$

$$= -\int (1 - u^2) \, du = -\int du + \int u^2 \, du = -u + \frac{u^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

$$2) \quad \int \cos^5 x \, dx.$$

В подынтегральной функции $\cos^5 x$ выделим первую степень косинуса, тогда:

$$\cos^5 x = \cos^4 x \cdot \cos x = (\cos^2 x)^2 \cos x = (1 - \sin^2 x)^2 \cos x = (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) \cos x \Rightarrow$$

$$\int \cos^5 x \, dx = \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) \cos x \, dx$$

$$= \left. \begin{array}{l} u = \sin x \\ du = \cos x \, dx \end{array} \right| = \int (1 - 2u^2 + u^4) \, du =$$

$$= \int du - 2 \int u^2 \, du + \int u^4 \, du = u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$$

$$3) \quad \int \cos^2 x \, dx.$$

Применим формулу понижения степени $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x):$

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + c = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + c.$$

Задача 2. Найти интегралы:

$$1) \quad \int \sin^5 x \, dx;$$

$$2) \quad \int \cos^3 x \, dx;$$

$$3) \quad \int \sin^2 x \, dx.$$

Задача 3. Найти интегралы:

$$1) \quad \int \sin^4 x \cos^3 x \, dx;$$

$$2) \quad \int \cos^2 x \sin^5 x \, dx.$$

Решение:

Эти примеры решаются так же, как и примеры 1), 2) задачи 1. У функции, которая под интегралом находится в нечетной степени, выделяем первую степень и применяем указанный выше прием.

$$1) \quad \int \sin^4 x \cos^3 x \, dx.$$

$$\sin^4 x \cos^3 x = \sin^4 x \cos^2 x \cos x = \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \cos x = (\sin^4 x - \sin^6 x) \cos x;$$

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cos^3 x \, dx &= \int (\sin^4 x - \sin^6 x) \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \sin x \\ du = \cos x \, dx \end{array} \right| = \int (u^4 - u^6) \, du = \\ &= \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + c = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + c. \end{aligned}$$

$$2) \quad \int \cos^2 x \sin^5 x \, dx.$$

$$\begin{aligned} \cos^2 x \sin^5 x &= \cos^2 x \sin^4 x \sin x = \cos^2 x (\sin^2 x)^2 \sin x = \cos^2 x (1 - \cos^2 x)^2 \sin x = \\ &= \cos^2 x (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \sin x = (\cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x) \sin x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \sin^5 x \, dx &= \int (\cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x) \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin x \, dx \\ \sin x \, dx = -du \end{array} \right| = \\ &= -\int (u^2 - 2u^4 + u^6) \, du = -\frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + c. \end{aligned}$$

Задача 4. Найти интегралы:

$$1) \int \sin^4 x \cos^7 x \, dx;$$

$$2) \int \sin^2 x \cos^3 x \, dx;$$

$$3) \int \sin^2 x \cos^5 x \, dx.$$

Задача 5. Найти интегралы:

$$a) \int \sin 3x \sin 4x \, dx, \quad б) \int \sin x \cos 2x \, dx.$$

Решение. *a)* $\int \sin 3x \sin 4x \, dx$.

Используем формулу (5):

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \int [\cos(3-4)x - \cos(3+4)x] \, dx &= \frac{1}{2} \int [\cos(-x) - \cos 7x] \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{14} \sin 7x + c. \end{aligned}$$

Замечание. $\cos(-x) = \cos x$, т.к. косинус – функция четная;
 $\sin(-x) = -\sin x$, т.к. синус – функция нечетная.

$$б) \int \sin x \cos 2x \, dx.$$

$$\begin{aligned} \int \sin x \cos 2x \, dx &\stackrel{(3)}{=} \int \frac{1}{2} [\sin(1-2)x + \sin(1+2)x] \, dx = \frac{1}{2} \int [\sin(-x) + \sin 3x] \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{6} \cos 3x + c. \end{aligned}$$

Задача 6. Найти интегралы:

$$1) \int \sin 5x \cos 3x \, dx;$$

$$2) \int \cos 2x \cos \frac{x}{2} \, dx.$$

Задание для самостоятельного решения

Задача 7. Найти интегралы:

$$1) \int \sin^7 x \, dx;$$

$$2) \int \cos^2 \frac{1}{2} x \, dx;$$

$$3) \int \sin^3 x \cos^2 x dx.$$

Задача 8. Найти интегралы:

$$1) \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx;$$

$$2) \int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx.$$

Задача 9. Найти интегралы:

$$1) \int \sin^3 x \cos^2 x dx;$$

$$2) \int \cos^2 3x dx;$$

$$3) \int \sin 5x \cos 7x dx.$$

§9. Интегрирование тригонометрических функций (продолжение)

1. Интегрирование функций вида $f(x) = R(\sin x; \cos x)$ с помощью подстановок $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$, $\operatorname{tg} x = z$.

2. Интегрирование функций вида $R(x; \sqrt{a^2 \pm x^2})$.

1. Интегралы вида $\int R(\sin x; \cos x) dx$ приводятся к интегралу от рациональных функций подстановкой:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z \quad (-\pi \leq x \leq \pi),$$

которая называется *универсальной тригонометрической подстановкой*. Эта подстановка приводит к формулам, по которым $\sin x, \cos x, dx$ выражаются рационально через новую переменную z :

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}; \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}; \quad dx = \frac{2 dz}{1+z^2} \quad (1)$$

(из $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$ следует, что $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} z$, $(-\pi \leq x \leq \pi)$ $x = 2 \operatorname{arctg} z$).

2. Интеграл вида $\int R(\sin x; \cos x) dx$, приводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $\operatorname{tg} x = z \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$, если функция, стоящая под знаком интеграла является четной относительно $\cos x$ и $\sin x$, т.е. $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$. С помощью подстановки $\operatorname{tg} x = z$ выражаем $\sin x$ и $\cos x$ рационально через новую переменную z :

$$\sin x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}; \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}; \quad dx = \frac{dz}{1+z^2}. \quad (2)$$

Из $\operatorname{tg} x = z$ следует, что $x = \operatorname{arctg} z \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$.

3. Для вычисления интегралов вида:

а) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ обычно применяют подстановку:

$$\left| \begin{array}{l} x = a \sin t \\ dx = a \cos t dt \end{array} \right| \Rightarrow t = \arcsin \frac{x}{a};$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2 (1 - \sin^2 t)} = a \sqrt{\cos^2 t} = a \cos t. \quad (3)$$

б) $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$ применяется подстановка:

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ dx = a \frac{\operatorname{tg} t}{\cos^2 t} dt \end{array} \right| \Rightarrow t = \arccos \frac{a}{x};$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2} = \sqrt{a^2 \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right)} = \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 t} = a \operatorname{tg} t. \quad (4)$$

в) $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$ применяется подстановка:

$$\left| \begin{array}{l} x = a \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt \end{array} \right| \Rightarrow t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a};$$

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 t + a^2} = \sqrt{a^2 (\operatorname{tg}^2 t + 1)} = \sqrt{a^2 \frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{a}{\cos t}. \quad (5)$$

Задача 1. Найти интегралы:

$$1) \int \frac{dx}{\sin x};$$

$$2) \int \frac{dx}{5+3\cos x}.$$

Решение. Применяем универсальную тригонометрическую подстановку (1):

$$1) \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2 dz}{1+z^2}}{\frac{1+z^2}{2z}} = \int \frac{2 dz}{1+z^2} \cdot \frac{1+z^2}{2z} = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + c = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c.$$

$$\begin{aligned} 2) \int \frac{dx}{5+3\cos x} &= \int \frac{\frac{2 dz}{1+z^2}}{5+3\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} = \int \frac{\frac{2 dz}{1+z^2}}{\frac{5(1+z^2)+3(1-z^2)}{1+z^2}} = \\ &= \int \frac{2 dz(1+z^2)}{(1+z^2)(5+5z^2+3-3z^2)} = \int \frac{2 dz}{8+2z^2} = \int \frac{2 dz}{2(4+z^2)} = \int \frac{dz}{4+z^2} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{z}{2} + c = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + c. \end{aligned}$$

Задача 2. Решить по образцу:

$$1) \int \frac{dx}{3\cos x};$$

$$2) \int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx;$$

$$3) \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}.$$

Задача 3. Найти интегралы:

$$1) \int \frac{dx}{8\sin^2 x - 16\sin x \cos x};$$

$$2) \int \frac{dx}{1+\sin^2 x}.$$

Решение. Применим тригонометрическую подстановку (2):

$$\begin{aligned}
 1) \int \frac{dx}{8 \sin^2 x - 16 \sin x \cos x} &= \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{8 \left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right)^2 - 16 \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}} = \\
 &= \int \frac{dz}{1+z^2} \cdot \frac{1+z^2}{8z^2-16z} = \int \frac{dz}{1+z^2} \cdot \frac{1+z^2}{8z^2-16z} = \int \frac{dz}{8z^2-16z} = \\
 &= \frac{1}{8} \int \frac{dz}{z^2-2z} = \frac{1}{8} \int \frac{dz}{z^2-2z+1-1} = \frac{1}{8} \int \frac{dz}{(1-z)^2-1} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z-1-1}{z-1+1} \right| + c = \\
 &= \frac{1}{16} \ln \left| \frac{z-2}{z} \right| + c = \frac{1}{16} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x} \right| + c.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \int \frac{dx}{1+\sin^2 x} &= \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{1+\left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2} = \int \frac{dz}{1+z^2} \cdot \frac{1+z^2}{1+z^2+z^2} = \int \frac{dz}{2z^2+1} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}z) + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + c.
 \end{aligned}$$

Задача 4. Решить по образцу:

$$1) \int \frac{dx}{4 \sin^2 x - 5 \cos^2 x};$$

$$2) \int \frac{dx}{1+3 \cos^2 x};$$

$$3) \int \frac{\sin^2 x \, dx}{3 \sin^2 x - \cos^2 x}.$$

Задача 5. Найти интегралы:

$$1) \int \sqrt{1-x^2} \, dx;$$

$$2) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Решение. 1) $\int \sqrt{1-x^2} dx$ относится к виду интегралов

$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$, где $a = 1$. Применяем подстановку (3): т.к. $a = 1$, то

$$\left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right| \Rightarrow t = \arcsin x; \quad \sin 2t = 2 \sin t \cos t; \quad \sqrt{1-x^2} = \cos t.$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \cos t \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t dt = \\ &= \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2t + c = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + c. \end{aligned}$$

2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. В подынтегральном выражении имеется $\sqrt{x^2-1}$,

следовательно, для решения используем подстановку (4), где $a = 1$, тогда:

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{\cos t} \\ dx = \frac{\operatorname{tg} t}{\cos^2 t} dt \end{array} \right| \Rightarrow t = \arccos \frac{1}{x}; \quad \sqrt{x^2-1} = \operatorname{tg} t.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\frac{\operatorname{tg} t}{\cos^2 t} dt}{\frac{1}{\cos t} \operatorname{tg} t} = \int \frac{\operatorname{tg} t \cos t dt}{\cos t \operatorname{tg} t} = \int dt = t + c = \arccos \frac{1}{x} + c$$

Задача 6. Найти интегралы:

1) $\int x\sqrt{x^2+1} dx$;

2) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx$;

3) $\int \sqrt{4-x^2} dx$.

Задание для самостоятельной решения

Задача 7. Найти интегралы:

1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

$$2) \int \frac{dx}{2 \sin x + \sin 2x};$$

$$3) \int \frac{1 + \cos x}{\sin x} dx.$$

Задача 8.

$$1) \text{ Найти интеграл: } \int \frac{dx}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}}.$$

$$\text{Докажите, что } \sin t = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}.$$

$$2) \text{ Найти интеграл: } \int \frac{dx}{(x^2 - 10)\sqrt{x^2 - 10}}.$$

§10. Закрепление темы «Неопределённый интеграл»

Задача. Выбрать метод интегрирования и найти интегралы

Интеграл:

Ответ:

$$1. \int (4x^2 + 3x^3 - 2x + 1) dx$$

$$\frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^4 - x^2 + x + c$$

$$2. \int \frac{dx}{5\sqrt{x^7}}$$

$$-\frac{2}{25\sqrt{x^3}} + c$$

$$3. \int \frac{(x^2 + 2)^2}{x^3} dx$$

$$\frac{x^2}{2} + 4\ln|x| - \frac{2}{x^2} + c$$

$$4. \int \frac{dx}{5 - 4x}$$

$$-\frac{1}{4}\ln|5 - 4x| + c$$

$$5. \int \frac{dx}{x \ln x}$$

$$\ln|\ln x| + c$$

$$6. \int (4x + 3)^{11} dx$$

$$\frac{1}{48}(4x + 3)^{12} + c$$

$$7. \int e^{5\cos x} \sin x dx$$

$$-\frac{1}{5}e^{5\cos x} + c$$

$$8. \int \left(\frac{b}{x} + \frac{m}{x^2} + \frac{d}{x^3} \right) dx$$

$$b\ln|x| - \frac{m}{x} - \frac{d}{2x^2} + c$$

$$9. \int \cos^2 \frac{x}{4} dx$$

$$\frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} + c$$

$$10. \int \frac{x}{1+x} dx$$

$$x - \ln|1+x| + c$$

$$11. \int \frac{x^2}{6+x^3} dx$$

$$\frac{1}{3} \ln|6+x^3| + c$$

$$12. \int x \sin x dx$$

$$-x \cos x + \sin x + c$$

$$13. \int x^3 \arctg x dx$$

$$\frac{x^4}{4} \arctg x - \frac{1}{4} \left(\frac{x^3}{3} - x + \arctg x \right) + c$$

$$14. \int e^x \cos x dx$$

$$\frac{1}{2} (e^x \sin x + e^x \cos x) + c$$

$$15. \int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$\frac{\ln^2 x}{2} + c$$

$$16. \int \arcsin x dx$$

$$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

$$17. \int \frac{dx}{(x-2)(x+4)}$$

$$\frac{1}{6} \ln|x-2| - \frac{1}{6} \ln|x+4| + c$$

$$18. \int \frac{xdx}{x^2+2x-15}$$

$$\frac{3}{8} \ln|x-3| + \frac{5}{8} \ln|x+5| + c$$

$$19. \int \frac{x+2}{x^2+4x} dx$$

$$\frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x+4| + c$$

$$20. \int \frac{xdx}{x^2+4x+8}$$

$$\frac{1}{2} \arctg \frac{x+2}{2} + c$$

$$21. \int \frac{xdx}{x^2+5x+10}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3,75}} \arctg \frac{x+2,5}{\sqrt{3,75}} + c$$

$$22. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+4}}$$

$$\ln|x+1,5+\sqrt{x^2+3x+4}| + c$$

$$23. \int \frac{3dx}{\sqrt{x^2+6x+11}}$$

$$3 \ln|x+3+\sqrt{x^2+6x+11}| + c$$

$$24. \int \frac{3x-2}{x^2+6x+9} dx$$

$$\frac{3}{2} \ln|x^2+6x+9| + \frac{11}{x+3} + c$$

$$25. \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$$

$$\ln|x^2+x+1|+c$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы:

$$1. \int \left(\frac{x^3}{2} - \frac{2}{x^2} \right) dx;$$

$$2. \int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^2 dx;$$

$$3. \int \frac{dx}{a+bx};$$

$$4. \int \frac{dx}{5x^3};$$

$$5. \int (1+x)(3-\sqrt{x}) dx;$$

$$6. \int \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^6} dx;$$

$$7. \int \left(\frac{1}{x} - 3\sqrt{x} + \frac{5x}{x^7} \right) dx;$$

$$8. \int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx;$$

$$9. \int (3x^3 + 5x^2 - 8)(9x^2 + 10x) dx, \text{ найти, не раскрывая скобок};$$

$$10. \int \frac{(4+2\sqrt{x})(x^3+5)}{\sqrt[3]{x^2}} dx;$$

$$11. \int \left(\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt[7]{x^5}} \right) dx;$$

$$12. \int \left(\frac{3}{x^5} - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^2} \right) dx;$$

$$13. \int (x^2+5)^7 2x dx;$$

$$14. \int \sqrt{x^2+6} x dx;$$

$$15. \int (2x^2+7)^3 x dx;$$

$$16. \int \sqrt[3]{x^3+8} x^2 dx;$$

$$17. \int \sqrt{a^2-x^2} x dx;$$

$$18. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{7+x^3}};$$

$$19. \int \sqrt{1-x} dx;$$

$$20. \int \sin^3 x \cos x dx;$$

$$21. \int \cos^4 x \sin 5x dx;$$

$$22. \int \sqrt[3]{\cos^2 x} \sin x dx;$$

$$23. \int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{1-x^2} dx;$$

$$24. \int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2} dx;$$

$$25. \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx;$$

$$26. \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} dx;$$

$$27. \int \frac{dx}{\sin x \cos x};$$

$$28. \int \operatorname{ctg} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} dx;$$

$$29. \int \frac{\operatorname{ctg}^3 ax}{\sin^2 ax} dx;$$

$$30. \int \frac{x^2}{1-x^4} dx;$$

$$31. \int \frac{\ln x}{x\sqrt{7+\ln^2 x}} dx;$$

$$32. \int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)};$$

33. $\int \frac{3 dx}{a^2 + x^2};$
35. $\int \frac{dx}{\arctg^4 x (x^2 + 1)};$
37. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{3 - \sin^2 x}} dx;$
39. $\int \frac{e^x}{5 + e^x} dx;$
41. $\int e^{x^3} x^2 dx;$
43. $\int \left(e^{\frac{x}{3}} + 2 \right) e^{\frac{x}{4}} dx;$
45. $\int \frac{e^{\arctg 2x}}{1 + 4x^2} dx;;$
47. $\int (e^x + e^{-x})^2 dx;;$
49. $\int \frac{dx}{7 + x^2};$
51. $\int \frac{dx}{5 + 16x^2};$
53. $\int \frac{9t + 5}{8t^2 + 9} dt;$
55. $\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2};$
57. $\int \frac{x}{7 + x^4} dx;$
59. $\int \frac{dx}{(5 + \ln^2 x) x};$
61. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}};$
63. $\int \frac{5x - 3}{\sqrt{7 - 2x^2}} dx;$
65. $\int \frac{dx}{5 - x^2};$
67. $\int \frac{dx}{x^2 + 17};$
34. $\int \frac{\arctg x + x}{1 + x^2} dx;$
36. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{5 + \cos x}} dx;$
38. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$
40. $\int \frac{e^{-\frac{x}{3}}}{5} dx;$
42. $\int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$
44. $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$
46. $\int (2e^{ms} - e^{ks}) ds;;$
48. $\int \frac{e^x + 2}{e^x} dx;$
50. $\int \frac{3 dx}{6 + 13x^2};$
52. $\int \frac{x + 3}{x^2 + 2} dx;$
54. $\int \frac{7x + 3}{10x^2 + 11} dx;$
56. $\int \frac{\cos x}{5 + \sin^2 x} dx;$
58. $\int \frac{x dx}{16 + 9x^4};$
60. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}};$
62. $\int \frac{dx}{\sqrt{7 - 8x^2}};$
64. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{5 - 3e^{4x}}} dx;$
66. $\int \frac{dx}{7 - 9x^2};$
68. $\int \frac{dx}{x^2 - 14};$

- | | | | |
|------|--|------|--|
| 69. | $\int \frac{dx}{a^2 x^2 - c^2};$ | 70. | $\int \frac{x^2 dx}{12 - x^6};$ |
| 71. | $\int \frac{dx}{(1 + x^2)\sqrt{5 + 3\operatorname{arctg}^2 x}};$ | 72. | $\int x \ln x dx;$ |
| 73. | $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}};$ | 74. | $\int \ln x dx;$ |
| 75. | $\int (\ln \sin x) \operatorname{ctg} x dx;$ | 76. | $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{1 + x^2} dx;$ |
| 77. | $\int e^{5x} dx;$ | 78. | $\int e^{\sin x} \cos x dx;$ |
| 79. | $\int e^{nx} dx;$ | 80. | $\int 3(\ln x) dx;$ |
| 81. | $\int \sqrt[3]{x} dx;$ | 82. | $\int \arcsin x dx;$ |
| 83. | $\int e^x \cos x dx;$ | 84. | $\int e^{2x} \cos 3x dx;$ |
| 85. | $\int \sin 7x dx;$ | 86. | $\int \cos 8x dx;$ |
| 87. | $\int \frac{dx}{x - 13};$ | 88. | $\int \frac{dx}{15 - 3x};$ |
| 89. | $\int \frac{dx}{4 - 7x};$ | 90. | $\int \frac{dx}{(x - 2)^3};$ |
| 91. | $\int \frac{dx}{(4 - 3x)^5};$ | 92. | $\int \frac{dx}{x^2 + x + 5};$ |
| 93. | $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 6};$ | 94. | $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 19};$ |
| 95. | $\int \frac{dx}{7x^2 - 3x + 5};$ | 96. | $\int \frac{3x - 11}{x^2 + 8x + 18} dx;$ |
| 97. | $\int \frac{x + 7}{x^2 + 11x + 42} dx;$ | 98. | $\int \frac{11x - 4}{x^2 + 2x - 8} dx;$ |
| 99. | $\int \frac{2x^2 + 41x + 91}{(x - 1)(x - 2)(x - 4)} dx;$ | 100. | $\int \frac{5x^2 - 25x + 26}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} dx;$ |
| 101. | $\int \frac{11x + 40}{4(x - 4)(x + 2)} dx;$ | 102. | $\int \frac{3x^2 + 23x + 28}{(x - 2)(x + 3)(x - 4)} dx;$ |
| 103. | $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 9x + 7}{(x - 2)^3(x - 5)} dx;$ | 104. | $\int \frac{x^2 + x + 5}{(x + 3)(x - 2)x} dx;$ |

Учебное издание

Давнилова Юлия Сергеевна

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ**

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции

Подписано в печать 16.06.2025.

Формат 60 × 90/16.

Усл. печ. л. – 4.77. Уч.-изд. л. – 1.21.

Тираж 50 экз. Заказ № 2553/5.1.

Издательский отдел Тольяттинской академии управления.
445144, Самарская область, Ставропольский район,
территория оздоровительный комплекс Алые паруса, здание 5



ТОЛЬЯТТИНСКАЯ АКАДЕМИЯ УПРАВЛЕНИЯ